Klassinen kenttäteoria 76329S
Tentti 29.4.2002 (kevään 2002 kurssin mukaan)

1. Tutkitaan vaikutusintegraalia
$$S = -\frac{1}{c}\int ds(mc^2 + V), \tag{1}$$
missä ds on neliavaruuden viivanpituuden differentiaali, ja $V(x^0, \mathbf{x})$ jokin potentiaali. Laske kanoninen liikemäärä, Hamiltonin funktio ja Lagrangen liikeyhtälö. Millä oletuksilla ne redusoituvat tutuiksi epärelativistisiksi yhtälöiksi.

2. Tutkitaan vaikutusintegraalia
$$S = \frac{1}{c}\int d\Omega\, \mathcal{L}\left(u^{(\ell)}, \frac{\partial u^{(\ell)}}{\partial x^i}\right). \tag{2}$$
määritellään energia-liikemäärätensori $T_i^{\ k}(x^0, \mathbf{x})$ kaavalla
$$T_i^{\ k} = \sum_\ell \frac{\partial u^{(\ell)}}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u^{(\ell)}/\partial x^k)} - \delta_i^k \mathcal{L}. \tag{3}$$
Osoita että tälle pätee säilymislaki
$$\frac{\partial T_i^{\ k}}{\partial x^k} = 0. \tag{4}$$

3. Liikkuvan varauksen kentälle johdettiin lausekkeet
$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)^3}\left(\boldsymbol{R} - \frac{R\boldsymbol{v}}{c}\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{c^2\left(R - \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)^3}\boldsymbol{R}\times\left[\left(\boldsymbol{R} - \frac{R\boldsymbol{v}}{c}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]\right\}, \\ \boldsymbol{B} &= \frac{1}{cR}\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{E}. \end{aligned} \tag{5}$$
Osoita näistä lähtien että epärelativistinen hiukkanen säteilee teholla
$$-\frac{dU}{dt} = \frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \tag{6}$$

4. Kurssilla johdettiin vapaalle sähkömagneettiselle kentälle kanonisten muuttujien avulla ilmaistu Hamiltonin funktio
$$H = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_\alpha \left(P^2_{\boldsymbol{k},\alpha} + c^2k^2Q^2_{\boldsymbol{k},\alpha}\right). \tag{7}$$

Johda tästä liikeyhtälöt suureille

$$
\begin{aligned}
c_{\boldsymbol{k},\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega Q_{\boldsymbol{k},\alpha} + iP_{\boldsymbol{k},\alpha}\right), \\
c^*_{\boldsymbol{k},\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega Q_{\boldsymbol{k},\alpha} - iP_{\boldsymbol{k},\alpha}\right). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

ja kirjoita Hamiltonin operaattori niiden avulla. Kuvaile sanallisesti mitä tapahtuu muuttujille c ja c^* kun siirrytään kvanttimekaniikkaan, ja miten niistä saadaan sähkömagneettiseen kenttään hiukkasominaisuudet.

5. Osoita että Maxwellin yhtälöt ja Lorentz-voiman sisältävä liikeyhtälö ovat invariantteja ajankäännössä. Miten on jos lisäksi käytetään relaatiota

$$\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}? \qquad (9)$$

Tulkitse tämä sanallisesti.