Klassinen kenttäteoria 76329S
Tentti 17.5.2002 (kevään 2002 kurssin mukaan)

1. Selitä seuraavat käsitteet (kustakin kohdasta muutama lause, mahdollisesti kaava)
   (a) pariteettisymmetria (esim. Maxwellin yhtälöille)
   (b) elektronin klassinen säde
   (c) Maxwellin jännitystensori
   (d) säteilyn reaktiovoima
   (e) kanoninen kvantisointi
   (f) toinen kvantisointi

2. Tutkitaan voimalla τ jännitettyä lankaa, johon on välein a kiinnitetty massoja m, jotka voivat värähdellä poikittaissuunnassa (koordinaatti μ_i). Olettaen periodiset reunaehdot ($\mu_{n+1} \equiv \mu_1$) voidaan pienille värähtelyille johtaa Lagrangen funktio

$$L = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{n}\dot{\mu}_i^2 - \frac{\tau}{2a}\sum_{i=1}^{n}(\mu_{i+1}-\mu_i)^2. \tag{1}$$

   Laske tästä Lagrangen liikeyhtälö. Etsi sen ominaisratkaisut ja ratkaise ominaistaajuudet aaltovektorin funktiona (dispersiorelaatio). Osoita että dispersiorelaatio on lineaarinen pienillä aaltovektoreilla ja kuvaa se graafisesti. Perustele miksi vain tietty äärellinen määrä ratkaisuja ovat mahdollisia.

3. Kvanttielektrodynamiikan Lagrangen tiheydelle saatiin lauseke

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(ic\hbar\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} - mc^2)\psi - ec\bar{\psi}\gamma^i\psi A_i \\ &\quad -\frac{1}{4\mu_0}F^{ik}F_{ik},\end{aligned} \tag{2}$$

   missä

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \tag{3}$$

   Johda tästä nelivektorimuotoiset yhtälöt Diracin kentille ψ ja $\bar{\psi}$ sekä sähkömagneettiselle kentälle.

4. Tarkastellaan sähkömagneettista tasoaaltoa

$$\boldsymbol{A}(t,x) = \boldsymbol{A}\left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{4}$$

Laske energiatiheys

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E^2}{c^2} + B^2\right) = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2, \tag{5}$$

energiavirrantiheys

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \tag{6}$$

ja liikemäärän tiheys

$$\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S} \tag{7}$$

Perustele sanallisesti miksi näiden kolmen suureen suhteet ovat niin kuin ne ovat.

5. Osoita että vektoripotentiaalin staattinen ratkaisu

$$\bar{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\bar{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \tag{8}$$

toteuttaa mittaehdon

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{A}} = 0. \tag{9}$$