Klassinen kenttäteoria 76329S
Tentti 16.8.2002 (kevään 2002 kurssin mukaan)

1. Etsitään minimiä funktionaalille

$$F(u) = \frac{1}{2}\int dx \int dy \left(\boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} u + \lambda u^2\right) \tag{1}$$

jollain annetulla reunaehdoilla. Määritä minkä differentiaaliyhtälön $u(x,y)$ toteuttaa. Diskretoi $F(u)$ käyttäen neliöhilaa $(x_i, y_i) = (ai, aj)$. Johda $F(u)$:n diskreettiä versiota minimoimalla, minkä yhtälön u_{ij} toteuttaa.

2. Kirjoita sähkömagneettisen kenttätensorin F_{ik} komponentit sähkö- ja magneettikenttien avulla. Käytä hyväksesi seuraavia kaavoja

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{2}$$

$$A^i = (\frac{\varphi}{c}, \boldsymbol{A}). \tag{3}$$

Mitä muita kaavoja tarvitset?

3. Luennolla johdettiin kaavat

$$\frac{d}{dt}\left[\sum \mathbb{E}_{\text{kin}} + \int dV \left(\frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right)\right] = -\oint d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{S}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum \boldsymbol{p} + \int dV \epsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}\right]_\beta = -\oint da_\alpha \sigma_{\beta\alpha}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}, \tag{6}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \epsilon_0 \left(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}E^2 - E_\alpha E_\beta\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}B^2 - B_\alpha B_\beta\right). \tag{7}$$

Kerro sanallisesti mitä yhtälöt (4) ja (5) kuvaavat ja mikä on niissä esiintyvien eri termien fysikaalinen tulkinta.

4. Jatkuvan materian tapauksessa kirjoitettiin sähkövaraus ja -virta muotoon

$$\rho = \rho_f - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}. \tag{8}$$

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_f + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}. \tag{9}$$

Mikä on näissä esiintyvien termien tulkinta. Lähtien Maxwellin yhtälöistä tyhjiössä, osoita näitä käyttäen että Maxwellin yhtälöt materiassa saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_f, \\
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} &= 0, \\
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} &= \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}_f. \qquad (10)
\end{aligned}$$

5. Oletetaan Lagrangen tiheys

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \mu^2 |\psi|^2. \qquad (11)$$

Johda siitä liikeyhtälö kentälle $\psi(t, \boldsymbol{r})$ muuttujien t ja $\boldsymbol{r}$ avulla lausuttuna. Millä identifikaatiolla tämä on ekvivalentti relativistisen dispersiorelaation

$$\frac{\mathbb{H}^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 \qquad (12)$$

kanssa.