Klassinen kenttäteoria 76329S
Tentti 15.8.2003 (kevään 2002 kurssin mukaan)

1. Selitä seuraavat käsitteet (kustakin kohdasta muutama lause, mahdollisesti kaava)
   (a) nelivektori
   (b) mittainvarianssi
   (c) elektronin klassinen säde
   (d) säteilyn reaktiovoima
   (e) Diracin yhtälö
   (f) toinen kvantisointi

2. Osoita että Lagrangen tiheys

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar}{2i}(\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + V \psi^* \psi. \tag{1}$$

johtaa Schrödingerin yhtälöön

$$i\hbar \dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi, \tag{2}$$

Miksi varioinnissa voidaan käsitellä ψ ja ψ^* riippumattomina muuttujina?

3. Tarkastellaan johtavaa R-säteistä palloa jonka sähkövaraus on Q. Määrää sähkökenttä pallon ympärillä. Pallo koostuu kahdesta puolipallosta. Laske niiden välillä vaikuttava voima käyttäen Maxwellin jännitystensoria

$$\sigma_{\alpha\beta} = \epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} E^2 - E_\alpha E_\beta \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} B^2 - B_\alpha B_\beta \right). \tag{3}$$

4. Tutkitaan vaikutusintegraalia

$$S = \frac{1}{c} \int d\Omega \, \mathcal{L} \left(u^{(\ell)}, \frac{\partial u^{(\ell)}}{\partial x^i} \right). \tag{4}$$

määritellään energia-liikemäärätensori $T_i^{\ k}(x^0, \mathbf{x})$ kaavalla

$$T_i^{\ k} = \sum_\ell \frac{\partial u^{(\ell)}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u^{(\ell)}/\partial x^k)} - \delta_i^k \mathcal{L}. \tag{5}$$

Osoita että tälle pätee säilymislaki

$$\frac{\partial T_i^{\ k}}{\partial x^k} = 0. \tag{6}$$

5. Osoita että Maxwellin yhtälöt ja Lorentz-voiman sisältävä liikeyhtälö ovat invariantteja ajankäännössä. Miten on jos lisäksi käytetään relaatiota

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}? \tag{7}$$

Tulkitse tämä sanallisesti.