Tutkielman otsikko

LuK-tutkielma
Opiskelijan nimi
Opiskelijanumero
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2010

Sisältö

Johdanto **2**

1 Ensimmäinen **2**
1.1 Johdanto 2
1.2 Alikappale 2

2 Johdannon analysointia **2**

3 Toinen **3**

4 Matematiikkaa **3**

Lähdeluettelo **5**

Johdanto

Tutkielmassa on käytetty pääasiassa teosta [1].

1 Ensimmäinen

1.1 Johdanto

Tässä johdatuksessa perehdytään johdatteluihin varsin syvällisesti. Erilasten johdantojen kautta saamme johdannon johdattelun abstraktiin maailmaan.

Lause 1.1. *Ensimmäinen ...*

Todistus. Todistetaan lause vastaoletuksen kautta. Olkoon siis... □

Tässä johdatuksessa perehdytään johdatteluihin varsin syvällisesti. Erilasten johdantojen kautta saamme johdannon johdattelun abstraktiin maailmaan.

Lemma 1.2. *Toinen ...*

Seuraus 1.3. *Olkoon Lemman 1.2 oletukset voimassa. Silloin...*

Huomautus 1.4. Edellä on huomattava, että ...

Tässä johdatuksessa perehdytään johdatteluihin varsin syvällisesti. Erilasten johdantojen kautta saamme johdannon johdattelun abstraktiin maailmaan.

Määritelmä 1.5. Määritellään ...

Esimerkki 1.6. Tarkastellaan joukkoa A ...

1.2 Alikappale

Ja tekstiä lisää...

2 Johdannon analysointia

Lauseen 1.1 ja Lemman 1.2 nojalla...

3 Toinen

Kappaleessa 1 sivulla 2 määriteltiin asioita ja osoitettiin jotain. Jatkakaamme samaa linjaa.

Määritelmä 3.1. Olkoon jokin jotakin. Tällöin sanomme olevamme jotakin.

Määritelmistä 1.5 ja 3.1 saamme seuraavan ilmeisen lauseen.

Lause 3.2. *Pisteitä ...*

Todistus. Todistus tosiaankin on ilmeinen. □

Seuraus 3.3. *Lisää pisteitä ...*

4 Matematiikkaa

Olkoon K epätyhjä konveksi suljettu joukko Hilbert-avaruudessa H. Operaattori $P_K : H \to K$ on *metrinen projektio* joukkoon K, jos se antaa jokaiselle pisteelle $x \in H$ sitä lähinnä olevan joukon K pisteen, eli $P_K x$ on ratkaisu minimointiongelmaan

$$\|x - P_K x\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|. \tag{1}$$

Lemma 4.1. *Jokaista $x \in H$ kohti on olemassa yksikäsitteinen $z \in K$, joka toteuttaa yhtälön*

$$\|x - z\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|. \tag{2}$$

Todistus. Olkoon $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$ sellainen jono, että

$$\lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = \inf_{y \in K} \|x - y\| = d.$$

Soveltamalla Hilbert-avaruudessa voimassa olevaa suunnikassääntöä

$$\|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 = 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 \text{ aina, kun } x_1, x_2 \in H$$

saadaan

$$\begin{aligned} 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 &= \|2x - y_n - y_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \\ &= 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\right\|^2 + \|y_n - y_m\|^2. \end{aligned}$$

Koska joukko K on konveksi, niin $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in K$. Täten

$$2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 \geq 4d^2 + \|y_n - y_m\|^2,$$

eli on oltava $\lim_{n,m\to\infty} \|y_n - y_m\| = 0$. Jono $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ on siis Cauchyn jono. Koska Hilbert-avaruus on täydellinen ja joukko K on suljettu, on olemassa sellainen $z \in K$, että

$$\lim_{n\to\infty} y_n = z$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \|x - z\| = d.$$

Pisteen $z = P_K x$ yksikäsitteisyyden todistamiseksi tarkastellaan kahta pistettä $z_1, z_2 \in K$, jotka molemmat toteuttavat yhtälön (2), eli

$$d = \|x - z_1\| = \|x - z_2\|.$$

Joukon K konveksisuuden perusteella $\frac{1}{2}(z_1 + z_2) \in K$, joten

$$d^2 \leq \left\| x - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \right\|^2 = \left\| \frac{1}{2}(x - z_1) + \frac{1}{2}(x - z_2) \right\|^2.$$

Suunnikassäännön avulla saadaan

$$\begin{aligned} d^2 &\leq -\left\| \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_2 \right\|^2 + 2\left\| \frac{1}{2}(x - z_1) \right\|^2 + 2\left\| \frac{1}{2}(x - z_2) \right\|^2 \\ &= -\left\| \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_2 \right\|^2 + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}d^2 \\ &= -\frac{1}{4}\|z_1 - z_2\|^2 + d^2, \end{aligned}$$

eli $z_1 = z_2$. □

Lemman 4.1 mukaan yhtälöllä (1) operaattori P_K on hyvin määritelty.

Lähdeluettelo

[1] E. Zeidler: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B; Nonlinear Monotone Operators*. Springer-Verlag, New York, 1990.