1. **Massakeskipisteen rata**
Pystysuoraan putoava kranaatti räjähtää kahteen yhtäsuureen osaan 2000 metrin korkeudessa. Kranaatin nopeus räjähtämishetkellä on 60 m/s. Räjähdyksen seurauksena toinen osa liikkuu alaspäin nopeudella 80 m/s. Mikä on systeemin massakeskipisteen paikka 10 s kuluttua räjähdyksestä?

2. **Kulmaliikemäärä massakeskipistettä käyttäen**
Tarkastellaan hiukkasjoukkoa, jossa hiukkasten paikat $\boldsymbol{r}_i$ ja massat m_i. Merkitään kokonaismassaa M:llä, massakeskipisteen paikkaa $\boldsymbol{R}$:llä, ja hiukkasten paikkavektoreita massakeskipisteen suhteen $\boldsymbol{r}'_i$.
   a) Lausu $\boldsymbol{r}_i$ käyttäen $\boldsymbol{R}$ ja $\boldsymbol{r}'_i$.
   b) Lausu hiukkasen i nopeus $\boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i$ käyttäen massakeskipisteen nopeutta $\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{R}}$ ja massakeskipisteen suhteen laskettua hiukkasen nopeutta $\boldsymbol{v}'_i = \dot{\boldsymbol{r}}'_i$. Tässä aikaderivaattaa on merkitty pisteellä.
   c) Osoita että $\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i = 0$ ja $\sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i = 0$.
   d) Osoita että hiukkasjoukon kulmaliikemäärä $\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$ massakeskipisteen avulla kirjoitettuna on

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \times M\boldsymbol{V} + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}'_i \ ,$$

   missä $\boldsymbol{p}'_i = m_i \boldsymbol{v}'_i$ on hiukkasen i liikemäärä massakeskipisteen suhteen.

3. **Kineettinen energia massakeskipistettä käyttäen**
Osoita, että hiukkassysteemin kineettinen energia voidaan kirjoittaa muotoon

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v'^2_i \ ,$$

missä M on kokonaismassa, $\boldsymbol{V}$ massakeskipisteen nopeus ja $\boldsymbol{v}'_i$ hiukkasten nopeudet massakeskipisteen suhteen. Huomaa, että $V^2 = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V}$ ja $v'^2_i = \boldsymbol{v}'_i \cdot \boldsymbol{v}'_i$. Vihje: käytä hyväksesi edellisen tehtävän tuloksia.

4. **Voimakenttä**

   a) Onko seuraava voima konservatiivinen? Laske myös vastaava potentiaali.

$$\boldsymbol{F} = (6abz^3y - 20bx^3y^2)\boldsymbol{i} + (6abxz^3 - 10bx^4y)\boldsymbol{j} + (18abxz^2y)\boldsymbol{k}$$

   b) Massan m sijaitessa origossa sen gravitaatiokentän potentiaalin lauseke on

$$V(r) = -\gamma\frac{m}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Muodosta voimavektorin $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ komponentit. Mistä tiedät että $\boldsymbol{F}$ on konservatiivinen?

c) Olkoon hiukkanen voimakentässä

$$\boldsymbol{F} = 24t^2\boldsymbol{i} + (36t - 16)\boldsymbol{j} - 12t\boldsymbol{k},$$

sen nopeuden ollessa

$$\boldsymbol{v} = 4t^3\boldsymbol{i} + (9t^2 - 8t)\boldsymbol{j} - 3t^2\boldsymbol{k}.$$

Näissä kaavoissa $\boldsymbol{F}$ on lausuttu Newtoneissa, nopeus yksiköissä m/s ja aika t sekunneissa. Mikä on kentän tekemä työ siirryttäessä hetkestä $t = 1$ hetkeen $t = 2$?
Vihje: Kirjoita työn lauseke uudelleen ottamalla parametriksi aika.

5. **Napakoordinaatit**
Esittäkööt koordinaatit (r, θ) hiukkasen paikkaa napakoordinaateissa. Jos $\hat{\boldsymbol{r}}$ on yksikkövektori paikkavektorin $\boldsymbol{r}$ suunnassa ja $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ on yksikkövektori, joka on kohtisuorassa vektoria $\boldsymbol{r}$ vastaan kasvavan θ:n suuntaan, osoita että

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= \hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta \\ \boldsymbol{j} &= \hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta. \end{aligned}$$

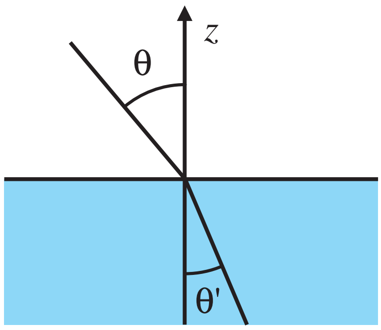
Osoita lisäksi, että

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{r}}} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}\dot{\theta} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= -\hat{\boldsymbol{r}}\dot{\theta} \end{aligned}$$

ja että nopeus ja kiihtyvyys saadaan kaavoista

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \hat{\boldsymbol{r}}\dot{r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}r\dot{\theta} \\ \boldsymbol{a} &= \hat{\boldsymbol{r}}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \hat{\boldsymbol{\theta}}(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}). \end{aligned}$$

1. **Snellin laki mekaniikassa**
   Tarkastellaan hiukkasta (kokonaisenergia E) potentiaalissa
   $$V(x,y,z) = \begin{cases} V, & \text{jos } z > 0 \\ V', & \text{jos } z < 0 \end{cases}.$$
   Osoita, että hiukkasen suunnan muutos noudattaa Snellin lakia
   $$n \sin\theta = n' \sin\theta',$$
   missä
   $$\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{E-V'}{E-V}}.$$
   Vihje: Käytä hyväksesi liikemäärän komponenttien p_x ja p_y sekä energian säilymistä.



2. **Kulmaliikemäärä liikkuvassa koodinaatistossa**
   Tarkastellaan pisteen $\boldsymbol{r}_0$ mukana liikkuvaa (vaan ei pyörivää) koordinaatistoa. Osoita, että tässä koordinaatistossa lasketulle kulmaliikemäärälle $\boldsymbol{L}' = \sum_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0) \times (\boldsymbol{p}_i - m_i \dot{\boldsymbol{r}}_0)$ on voimassa
   $$\dot{\boldsymbol{L}}' = \boldsymbol{N}' + M(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{R}) \times \ddot{\boldsymbol{r}}_0,$$
   missä $\boldsymbol{N}'$ on ulkoisten voimien momentti pisteen $\boldsymbol{r}_0$ suhteen, M on kokonaismassa ja $\boldsymbol{R}$ on massakeskipiste. Mainitse kaksi erikoistapausta, joissa $\dot{\boldsymbol{L}}' = \boldsymbol{N}'$?

3. **Heittoliikkeen häiriölasku**
   Laske välivaiheet luentomateriaalin luvussa 2.3 esitetystä häiriölaskusta. Vihje: heittoon kuluva aika määräytyy ehdosta $y_0(t) + y_1(t) = 0$. Tämä johtaa toisen asteen yhtälöön. Sen ratkaisu tavanomaisella ratkaisukaavalla on mahdollista. Pääset kuitenkin vähemmällä, jos sovellat siihenkin häiriölaskua, siis sijoitat $t = t_0 + t_1$ ja muodostat nollannen ja ensimmäisen kertaluvun yhtälöt k:ssa.

4. **Epälineaarisen värähtelijän häiriölasku**
Tutkitaan hiukkasen (massa m) yksiulotteista liikettä potentiaalissa

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}m\varepsilon x^4.$$

Potentiaalin lisäksi hiukkaseen vaikuttaa harmonisesti värähtelevä voima $mA\cos\omega t$.

a) Muodosta hiukkasen Newtonin liikeyhtälö.

b) Oletetaan, että $\omega_0^2 = k/m \neq \omega^2$. Kirjoita häiriöteorian avulla (ε:n suhteen) nollannen ja ensimmäisen kertaluvun liikeyhtälöt sekä ratkaise ne yritteillä

$$x_0 = B\cos\omega t, \quad x_1 = C\cos\omega t + D\cos 3\omega t.$$

Hahmottele värähtelyn amplitudit B, C ja D taajuuden funktiona (tutki tapausta $\varepsilon > 0$). Millä ω:n arvoilla häiriöteorian ensimmäinen kertaluku on riittämätön?

1. **Napakoordinaatisto**
   Laske läpi kaikki välivaiheet luentomonisteen luvun 3.2 esimerkistä 2: *Yksi hiukkanen napakoordinaateissa.*

2. **Heittoliike Lagrangen mekaniikassa**
   a) Johda vinon heittoliikkeen yhtälöt Lagrangen formalismin avulla (alkunopeus v_0 ja heittokulma α).

   b) Yritä keksiä Lagrangen funktioon jokin lisätermi, joka tuottaisi luennolla käsitellyn ilmanvastusvoiman.

3. **Heiluri**
   Kirjoita yksinkertaisen heilurin Lagrangen funktio ja sen liikeyhtälö. Ratkaise liikeyhtälö pienien värähtelyjen tapauksessa (värähtelyn amplitudi $\ll$ langan pituus).

4. **Jousi**
   a) Osoita että jouseen, jonka jousivakio k, liittyy potentiaalienergia $\frac{1}{2}ks^2$, missä s on jousen pituuden muutos sen lepopituudesta. Tätä varten laske ulkoisen voiman tekemä työ kun jousta venytetään s:n verran, ja totea että sama lasku pätee myös negatiiviselle s:lle.

   b) Kirjoita Lagrangen funktio jousesta riippuvalle painolle, joka voi liikkua vain pystysuunnassa. Ratkaise Lagrangen yhtälöt.
   Vihje: Differentiaaliyhtälö muotoa $Ly = f$, missä L on lineaarinen operaattori ja f on y:stä riippumaton "epähomogeenisuus", ratkaistaan etsimällä ensin homogeenisen yhtälön $Ly = 0$ yleinen ratkaisu ja sitten etsimällä täyden yhtälön $Ly = f$ yksi ratkaisu. Yleinen ratkaisu saadaan näiden ratkaisujen summana.

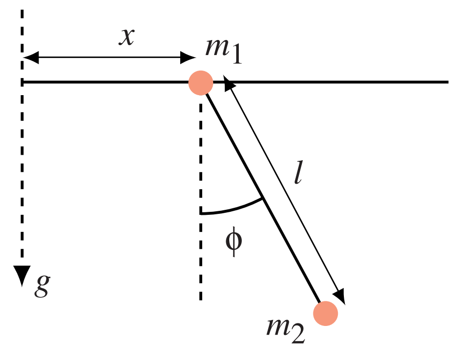
5. **Pallokoordinaatisto**

   a) Osoita että hiukkasen kineettinen energia pallokoordinaateissa ($\boldsymbol{r} = r\cos\phi\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin\phi\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{y}} + r\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{z}}$) on

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2).$$

   b) Kirjoita Lagrangen funktio massapisteelle, joka on painovoimakentässä ja on yhdistetty painottomalla jousella kiinteään pisteeseen.

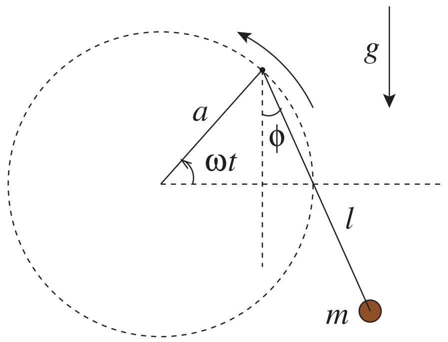
1. **Liukuva heiluri**
Tutkitaan systeemiä jossa on heiluri (massa m_2, pituus l) ja sen kiinnityspisteeseen, joka voi liikkua vaakasuoraan heilurin heilahdussuunnassa, liittyy massa m_1.



Osoita, että systeemin Lagrangen funktio on

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l \dot{x}\dot{\phi}\cos\phi + g m_2 l \cos\phi.$$

2. **Pyörivä heiluri**
Tutkitaan tasoheiluria (massa m, pituus l), jonka ripustuspiste kiertää vakiokulmanopeudella ω heilurin tasossa olevan ympyrän (säde a) kehää pitkin.



Osoita, että Lagrangen funktio on

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mal\omega\dot{\phi}\sin(\phi - \omega t) + mgl\cos\phi - mga\sin\omega t + \frac{1}{2}ma^2\omega^2.$$

Miksi kahdella viimeisellä termillä ei ole vaikutusta Lagrangen liikeyhtälöihin?

KÄÄNNÄ

3. **Sähkömagneettiset potentiaalit**

a) Osoita, että Maxwellin yhtälöt

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad , \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$$

toteutuvat automaattisesti, kun kentät kirjoitetaan skalaaripotentiaalin ϕ ja vektoripotentiaalin $\boldsymbol{A}$ avulla, kuten

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} \quad , \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}.$$

b) Osoita, että $\boldsymbol{A}$ ja ϕ eivät ole yksikäsitteisesti määrättyjä, vaan että samat kentät $\boldsymbol{E}$ ja $\boldsymbol{B}$ saadaan, vaikka tehdään *mittamuunnos*

$$\boldsymbol{A'} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi \quad , \qquad \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

missä $\chi(\boldsymbol{r}, t)$ on mielivaltainen funktio.

4. **Liike magneettikentässä**
Tutki varatun hiukkasen liikettä vakiomagneettikentässä $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$. Totea, että $\boldsymbol{B}$ voidaan esittää käyttäen vektoripotentiaalia $\boldsymbol{A} = -By\hat{\boldsymbol{x}}$. Muodosta Lagrangen yhtälöt karteesisille koordinaateille. Osoita, että ratkaisu x-y-tasossa on ympyräliike

$$x = x_0 + r_0 \cos(\omega t + \phi_0) \quad , \quad y = y_0 + r_0 \sin(\omega t + \phi_0)$$

kulmanopeudella

$$\omega = -\frac{qB}{m},$$

joka ei riipu radan säteestä r_0. Mitä voit sanoa liikkeestä z-suuntaan? Tutki, että yleisessä ratkaisussa on vaadittava määrä (6) vapaita parametreja.

1. **Harmoninen liike**
   Muodosta Lagrangen funktio, laske Lagrangen liikeyhtälöt ja esitä niiden yleinen ratkaisu seuraavissa tapauksissa.
   a) Hiukkanen yksiulotteisessa potentiaalissa
   $$V(x) = 6kx(x-2),$$
   missä k on vakio.
   b) Hiukkanen kolmiulotteisessa harmonisessa potentiaalissa
   $$V(x,y,z) = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2),$$
   missä k_1, k_2 ja k_3 ovat vakioita.

2. **Liike sylinterillä**
   Tarkastellaan z-akselin suuntaisen sylinterin $x^2 + y^2 = R^2$ pinnalla kitkatta liikkuvaa massapistettä, johon vaikuttaa origoon suuntautunut voima $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$. Kirjoita systeemin Lagrangen funktio. Johda siitä liikeyhtälöt ja ratkaise ne. Käytä sylinterikoordinaatteja $\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{x}}\rho\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\rho\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}z$.

3. **Minimaalinen pyörähdyspinta**
   Laske luennolla esitetyn luvun 4.2 variointiesimerkin 3 välivaiheet. Differentiaaliyhtälön yleisen ratkaisun toteamiseksi riittää osoittaa, että ratkaisu toteuttaa saadun yhtälön ja että siinä on kaksi vakiota (joiden vaikutus eroaa toisistaan).

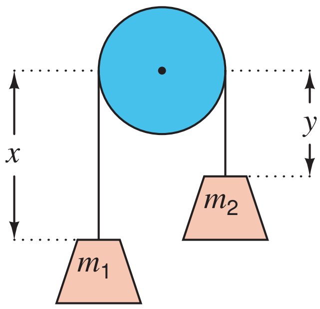
4. **Fermat'n laki**
   Fermat'n lain mukaan valo kulkee kahden pisteen välillä reittiä, johon kuluva aika on ekstremaalinen (minimi). Lähtien Fermat'n laista
   a) osoita, että homogeenisessa väliaineessa (valonnopeus c) valo kulkee suoraa viivaa pitkin. (Vihje: palauta tehtävä jo tuttuun esimerkkiin, jota ei tarvitse laskea uudelleen.)
   b) johda heijastumislaki ja Snellin taittumislaki kahden aineen rajapinnassa (valon nopeudet c_1 ja c_2).

1. **Toinen derivaatta Lagrangen funktiossa**
Oletetaan, että Lagrangen funktio riippuu kiihtyvyyksistä eli
$L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}; t)$. Johda Hamiltonin periaatteesta lähtien liikeyhtälö funktiolle q. Mitkä ovat järkevät reunaehdot tässä tapauksessa? Edelleen, mikä on liikeyhtälö tapauksessa

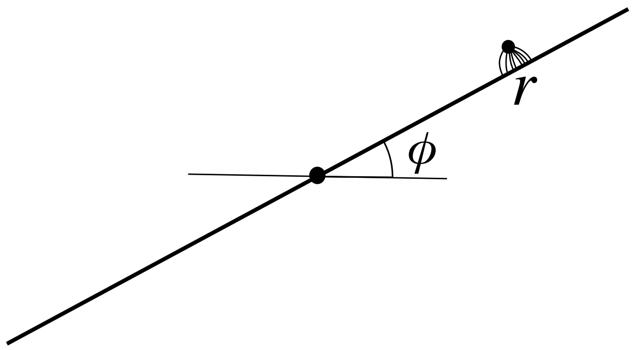
$$L = -\frac{m}{2} q\ddot{q} - \frac{k}{2} q^2 \ ?$$

2. **Heiluri differentiaalisella side-ehdolla**
Tutki yksinkertaista heiluria uudestaan niin, että heilurin pituus otetaan mukaan differentiaalisena side-ehtona Lagrangen yhtälössä. Osoita, että heilurin liikeyhtälöksi saadaan sama kuin aiemminkin ja laske lankaa jännittävä yleistetty voima. [Vastaus: $Q = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$.]

3. **Atwoodin pudotuskoe differentiaalisella side-ehdolla**
Tutkitaan uudestaan luennolla käsiteltyä Atwoodin pudotuskoetta. Jotta saisit laskettua langassa olevan jännityksen Q, käytä kummankin punnuksen sijainnille omaa koordinaattia, ja ota langan vakiopituus huomioon differentiaalisilla side-ehdoilla. [Vastaus: $Q = 2m_1 m_2 g/(m_1 + m_2)$.]

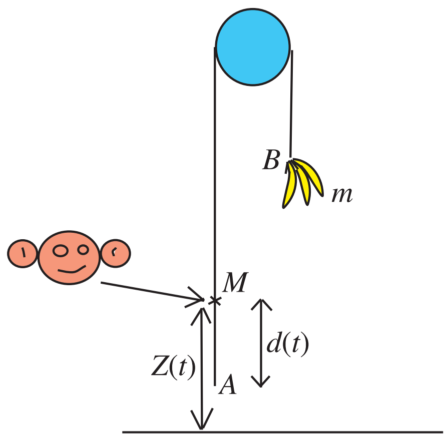


4. **Kävelevä hämähäkki**
Hämähäkki pääsee kävelemään korrella, joka kiertyy painopisteensä kautta kulkevan vaakasuoran akselin ympäri. Näihin vaikuttaa vakio painovoima. Mikä on hämähäkin etäisyyden r kiertoakselista oltava, jotta korren kulmanopeus $\omega = \dot{\phi}$ pysyisi vakiona? (Vihje: Hämähäkin kävely kortta pitkin määrää funktion $r(t)$, joten vapaaksi yleistetyksi koordinaatiksi jää vain korren kiertymiskulma ϕ. Ratkaise tätä vastaava Lagrangen yhtälö.) Osoita myös, että korren pyörimisestä aiheutuvalla kineettisellä energialla $T_{\text{korsi}} = \frac{1}{2} I\dot{\phi}^2$ ei ole vaikutusta lopputulokseen. [Vastaus: $r = r_0 - (g/2\omega^2)\sin\phi$.]



r
ϕ

1. **Apina ja banaanit**
Massaton venymätön naru kulkee kiinnitetyn väkipyörän yli. Banaaniterttu, massaltaan m, on kiinnitetty narun toiseen päähään B. Apina, massaltaan M, on aluksi langan toisessa päässä A. Apina kiipeää narua ja sen liikkuma matka $d(t)$ suhteessa narun päähän A on jokin funktio ajan suhteen. Systeemi on aluksi levossa, joten alkuehdot ovat $d(0) = \dot{d}(0) = 0$. Valitse sopivat yleistetyt koordinaatit ja laske systeemin Lagrangen funktio niissä koordinaateissa. Osoita, että apinan korkeutta Z kuvaava yhtälö on
$$(m + M)\ddot{Z} - m\ddot{d} = (m - M)g.$$
Integroi yhtälö liikkeen ratkaisemiseksi. Erikoistapauksessa $M = m$ osoita, että banaanit ja apina nousevat saman korkeuden siten, että niiden pystysuora etäisyys on vakio.



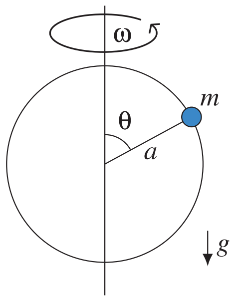
2. **Liikevakiot**
Harjoituksessa 4.1 johdettiin Lagrangen funktio
$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\phi}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi + gm_2 l\cos\phi.$$
Mitkä ovat järjestelmän liikevakiot?

3. **Relativistinen hiukkanen**
Väitetään että relativistista hiukkasta potentiaalissa $V = -k/r$ kuvaa Lagrangen funktio
$$L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}{c^2}} + \frac{k}{r}, \tag{1}$$
missä r ja ϕ ovat napakoordinaatit, m hiukkasen massa ja c valon nopeus. Etsi liikevakiot. Ovatko nämä sopusoinnussa sen kanssa mitä opit Johdatus suhteellisuusteoriaan 1 -kurssilla? Huomaa että relativistiselle hiukkaselle H pitää laskea H:n perusmääritelmästä lähtien.

4. **Hamiltonin funktio ajasta riippuvan side-ehdon tapauksessa**
Tarkastellaan helmeä (massa m) joka pääsee liukumaan kitkatta pystysuorassa olevaa vannetta pitkin. Vanteen säde on a ja se pyörii keskipisteensä läpi kulkevan pystysuoran akselin ympäri kulmanopeudella ω. Käyttäen hyväksi kineettisen energian lauseketta pallokoordinaateissa, osoita että järjestelmää kuvaa Lagrangen funktio

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2\theta - mga\cos\theta. \tag{2}$$

Muodosta lausekkeet sekä Hamiltonin funktiolle että helmen kokonaisenergialle. Osoita että ne eivät ole samat. Kumpi niistä on vakio?



1. **Keskuskappaleiden massojen suhteet kiertoradoista**
Muodosta likiarvo maan ja auringon massojen suhteelle käyttämällä ainoastaan vuoden pituutta, kuukauden pituutta (27.3 päivää), maan radan keskimääräistä sädettä ($149 \cdot 10^6$ km) ja kuun radan sädettä (380000 km).

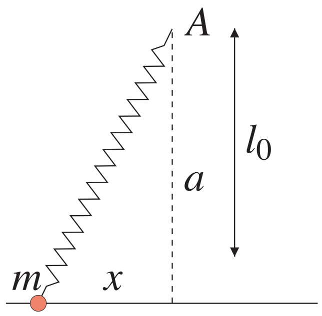
2. **Satelliitin rata**
Kaasukehättömän planeetan (massa M, säde R) pinnalta ammutaan m-massainen ($m \ll M$) satelliitti kiertoradalle. Satelliitti nousee radalleen korkeudelle $h = r - R$ ja sille annetaan paikkavektoria vastaan kohtisuorassa oleva alkunopeus v. Laske, että radan eksentrisyys ε alkunopeuden v funktiona on
$$\varepsilon = \left|1 - \frac{rv^2}{GM}\right|.$$
Millä v:n arvoilla rata on ellipsi, ympyrä tai hyperbeli?

3. **Ratojen sulkeutuvuus häiriöteorialla**
Laske läpi yksityiskohdat luetomonisteen luvun 5.3 kappaleesta “ratojen sulkeutuvuus”.

4. **Sironta kovasta pallosta**
Tarkastellaan pistemäisten hiukkasten sirontaa kiinnitetystä kovasta pallosta, jonka säde on R. Oletetaan sironta elastiseksi, eli hiukkasen tulo- ja lähtökulma pinna normaalin kanssa ovat yhtä suuret. Laske sironnan differentiaalinen- ja kokonaisvaikutusala. (*Vastaus:* $d\sigma/d\Omega = R^2/4, \sigma = \pi R^2$)

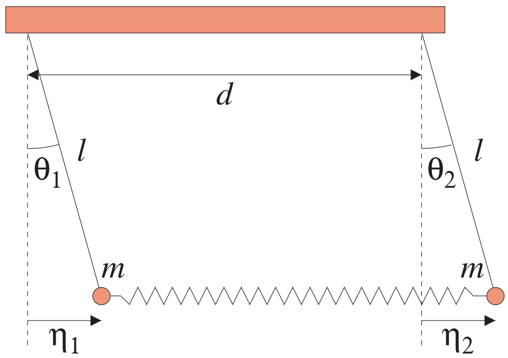
5. **Painovoiman vaikutus törmäysvaikutusalaan**
Osoita, että törmäysvaikutusala $\sigma_{\text{collision}}$ tapauksessa, jossa pistemäinen hiukkanen (massa m, suhteellinen nopeus kaukana v_∞) törmää suureen palloon (säde R, massa $M \gg m$), on
$$\sigma_{\text{collision}} = \pi R^2 + \frac{2\pi GMR}{v_\infty^2} ,$$
missä G on gravitaatiovakio. Vihje: törmäys tapahtuu jos pistemäisen hiukkasen radan lyhyin etäisyys $f - a$ suuren pallon keskipisteestä on pienempi kuin R.

1. **Rajoitettu värähtelijä**
Määritä värähtelytaajuus pienten värähtelyjen tapauksessa hiukkaselle (massa m), joka on kiinnitetty jouseen, jonka toinen pää on kiinnitetty pisteeseen A (kuva). Hiukkanen voi liikkua vapaasti pitkin suoraa viivaa, joka on etäisyydellä a pisteestä A. Jousen pitämiseen pituudessa a (suurempi kuin lepopituus l_0) vaadittava voima on F.



2. **Kytketyt heilurit**
Kaksi identtistä heiluria (pituus l, massa m) on kytketty toisiinsa vaakasuoraan jousella (jousivakio k, lepopituus d) siten, että tasapainossa heilurit ovat pystysuorassa (kuva). Kirjoita Lagrangen funktio tarkasti ja sitten pienten värähtelyjen approksimaatiossa. Tulos pienten värähtelyjen approksimaatiossa:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{l} + k\right)\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right) + k\eta_1\eta_2$$

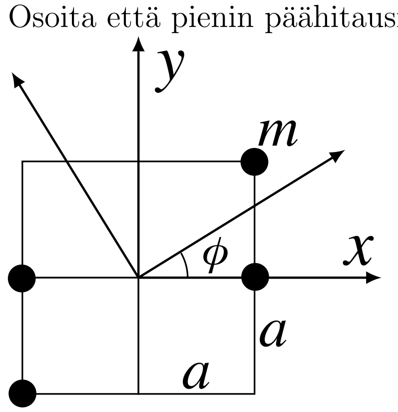


3. **Kytkettyjen heilurien taajuudet**
Osoita, että edellisen tehtävän pienten värähtelyjen taajuudet ovat $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ja $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$. Mitkä ovat ominaisvektorit?

1. **Painovoima pyörivässä koordinaatistossa**
Tarkastellaan mitä näennäisiä voimia kohdistuu kappaleeseen maan pyörimisliikkeen (kulmanopeus ω) vaikutuksesta. Määritellään $m\boldsymbol{g}$ voimana, joka vaikuttaa kappaleeseen, joka on paikallaan maan mukana pyörivässä koordinaatistossa.
   a) Osoita että $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_0 + r\omega^2 \sin\theta \hat{\boldsymbol{\rho}}$, missä on käytetty sekä pallo- (r, θ, ϕ) että sylinterikoordinaatteja (ρ, φ, z) ja $\boldsymbol{g}_0$ on pelkkä gravitaatiokiihtyvyys.
   b) Muodostetaan ortonormeerattu koordinaatisto, jossa $\hat{\boldsymbol{z}}$ on $-\boldsymbol{g}$:n suuntaan, $\hat{\boldsymbol{x}}$ on etelään ja $\hat{\boldsymbol{y}}$ itään. Tässä koordinaatistossa $\boldsymbol{\omega} = \omega(\hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta - \hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta) + O(\omega^3)$. Osoita häiriölaskulla ω:n suhteen, että korkeudelta h vapaasti putoavan kappaleen rata on
$$\boldsymbol{r}(t) = (h - \frac{1}{2}gt^2)\hat{\boldsymbol{z}} + \frac{1}{3}\omega g t^3 \sin\theta \hat{\boldsymbol{y}}.$$

2. **Suorakulmaisen särmiön hitausmomenttitensori**
Homogeenistä suorakulmaista särmiötä kuvaa tiheys
$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} M/abc & \text{jos } |x| < \frac{a}{2} \text{ ja } |y| < \frac{b}{2} \text{ ja } |z| < \frac{c}{2}, \\ 0 & \text{muutoin,} \end{cases} \tag{3}$$
missä M on kokonaismassa. Laske suorakulmaisen särmiön hitausmomenttitensori sen keskipisteen suhteen. Johda erikoistapauksena ($b \to 0$ ja $c \to 0$) ohuen sauvan hitausmomenttitensori.

3. **Päähitausmomentit epäsymmetriselle kappaleelle**
Tutkitaa toisiinsa jäykästi kiinnitettyjä massapisteitä (jokaisen massa m) paikoissa $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$ and $(-1, -1, 0)$ (yksiköissä a). Laske hitausmomenttitensori. Osoita että päähitausmomentit ovat
$$I_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})ma^2, \quad I_3 = 6ma^2. \tag{4}$$
Osoita että pienin päähitausmomentti vastaa akselia, jonka napakulma on $\phi = 31.7°$.

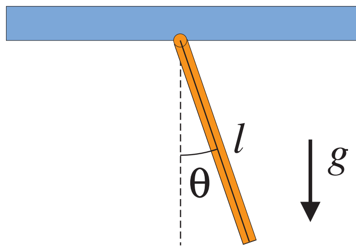


4. **Hitausmomentin riippuvuus origon valinnasta**
Aikasemmassa harjoitustehtävässä (1.3) totesimme että hiukkasjoukon kineettinen energia

$$T = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + T' \tag{5}$$

missä M on kokonaismassa, $\dot{\boldsymbol{R}}$ on massakeskipisteen nopeus ja T' on kineettinen energia massakeskipistekoordinaatiston suhteen. Soveltaen tätä tulosta jäykälle kappaleelle, päättele sauvan päähitausmomentit sauvan pään suhteen.

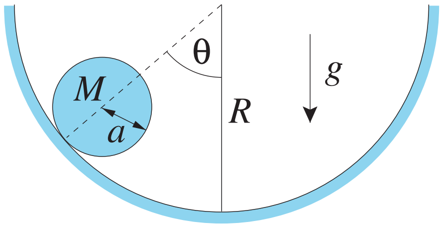
5. **Sauvaheiluri**
Muodosta Lagrangen funktio tasapaksulle ohuelle sauvalle (massa M, pituus l), joka on kiinnitetty toisesta päästään siten, että se heilahtelee tasossa vakiossa painovoimakentässä. Laske myös pienten värähtelyjen taajuus.



1. **Sylinteri sylinteripinnalla**
   Osoita että R-säteisen sylinterin sisäpinnalla vierivän homogeenisen sylinterin (säde a, massa M, keskipisteen napakulma θ) kineettinen energia on

$$\frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\theta}^2$$

   Osoita että pienten värähtelyjen taajuus on $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}$.



   Apuna voit käyttää tulosta että homogeenisen sylinterin hitausmomentti sen akselin suhteen on $Ma^2/2$.

2. **Eulerin yhtälö Eulerin kulmista lähtien**
   Lähtien Lagrangen yhtälöstä Eulerin kulmalle γ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial T}{\partial \gamma} = N_3,$$

   johda Eulerin yhtälö

$$I_3\dot{\omega}_3 = \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) + N_3.$$

3. **Symmetrinen hyrrä painovoimakentässä**
   Laske välivaiheet luennolla esitetystä (luku 7.4) symmetrisestä hyrrästä painovoimakentässä.

4. **Heiluri Hamiltonin mekaniikalla**
   Tarkastellaan yksinkertaista heiluria, jolle

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta.$$

   Kirjoita Hamiltonin funktio kanonisten muuttujien funktiona. Osoita, että Hamiltonin liikeyhtälöistä saadaan θ:lle sama yhtälö kuin Lagrangen formalismissakin.

1. **Poissonin sulkusuure tulolle**
   Osoita, että Poissonin sulkusuureille on voimassa

$$[AB, C]_{\mathrm{PB}} = A\,[B, C]_{\mathrm{PB}} + [A, C]_{\mathrm{PB}}\,B\ .$$

2. **Säilymislait Poissonin sulkusuureilla**
   Osoita, että liikeyhtälöistä

$$\frac{dA}{dt} = -[H, A]_{\mathrm{PB}} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

   seuraavat Hamiltonin mekaniikassa (a) Hamiltonin funktion säilyminen, kun $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ja (b) kanonisen liikemäärän p_k säilyminen, kun $\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$.

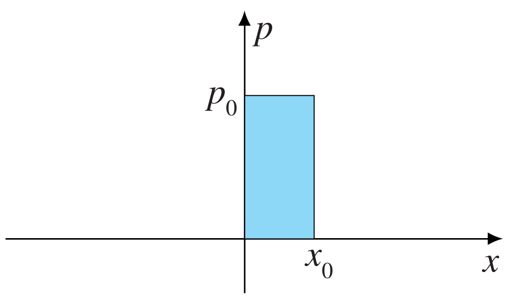
3. **Kulmaliikemäärän Poissonin sulkusuuret**
   Yhteen hiukkaseen liittyvä kulmaliikemäärä on $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Osoita kulmaliikemäärän komponenteille suorakulmaisessa koordinaateissa luennoilla mainitut Poissonin sulkusuureet:

$$[L_i, L_j]_{\mathrm{PB}} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k,$$

$$[L^2, L_i]_{\mathrm{PB}} = 0.$$

   Perustele, miksi samat tulokset ovat voimassa myös hiukkasjoukolle.

4. **Liike faasiaravuudessa**
   Tarkastellaan hiukkasta joka voi liikkua vapaasti ($V = 0$) yhdessä ulottuvuudessa x. Kirjoita sen Lagrangen funktio, Hamiltonin funktio ja Hamiltonin liikeyhtälöt. Piirrä Hamiltonin funktion vakioarvokäyrät faasiavaruudessa. Oletetaan että systeemin tilaa alkuhetkellä $t = 0$ kuvaa todennäköisyysjakauma joka on nollasta poikkeava vakio vain oheisen kuvan suorakaiteen muotoisella alueella. Kuvaile miten tämä jakauma kehittyy ajan kuluessa. Totea että liike toteuttaa Liouvillen lauseen. (vihje: ratkaise liikeyhtälöt jakauman kulmapisteille.)



5. **Jatkuvuusyhtälö yhdessä ulottuvuudessa**
Luennolla mainittiin, että jatkuvuusyhtälön johto ei olennaisesti riipu avaruuden dimensioiden määrästä. Johda jatkuvuusyhtälö 1-ulotteisessa tapauksessa

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{d}{dx}[\rho(x,t)v(x,t)] = 0.$$

Totea myös jatkuvuusyhtälön toinen muoto.