

Annuiteettiperiaate

Olkoon

- lainan suuruus l ,
- korkoprosentti p , ja
- takaisinmaksuaika vuosina n .

Luvut l , p ja n oletetaan siis annetuiksi.

Lainan takaisinmaksu tapahtuu $12n$ kuukausierässä, kunkin suuruus olkoon x . Lasketetaan x siten, että

$$12nx = (\text{lainan kokonaiskustannukset}). \quad (1)$$

Lainan kokonaiskustannukset ovat

$$L = l + (\text{korot}). \quad (2)$$

Koska lainan suuruus muuttuu joka kuukausi, on joka kuukaudelle laskettava korkokulut erikseen:

$$L = l + \sum_{i=1}^{12n} (i\text{:nnen kuukauden korkokulut}) \quad (3)$$

Laina kasvaa kuukaudessa korkoa tekijällä

$$k = \sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}}, \quad (4)$$

joten

$$L = l + \sum_{i=1}^{12n} (k-1)l_i = l + (k-1) \sum_{i=1}^{12n} l_i, \quad (5)$$

missä l_i on lainan suuruus i :nnen kuukauden alussa.

Määritetään l_i l :n avulla. Selvästi

$$l_{i+1} = kl_i - x, \quad (6)$$

kun $i = 1, 2, \dots$, joten

$$l_1 = l \quad (7)$$

$$l_2 = kl - x \quad (8)$$

$$l_3 = k(kl - x) - x = k^2l - (1+k)x \quad (9)$$

$$l_4 = k^3l - (1+k+k^2)x \quad (10)$$

jne. Induktiolla voidaan päätellä, että

$$l_{i+1} = k^i l - x \sum_{j=0}^{i-1} k^j = k^i l - x \frac{k^i - 1}{k - 1} \quad (11)$$

Lasketaan yhtälössä (5) esiintyvä summa:

$$\sum_{i=1}^{12n} l_i = l \sum_{i=1}^{12n} k^{i-1} - x \sum_{i=1}^{12n} \frac{k^{i-1} - 1}{k - 1} \quad (12)$$

$$= l \frac{k^{12n} - 1}{k - 1} - \frac{x}{k - 1} \left(\frac{k^{12n} - 1}{k - 1} - 12n \right) \quad (13)$$

Siis

$$(k - 1) \sum_{i=1}^{12n} l_i = l(k^{12n} - 1) - x \frac{k^{12n} - 1}{k - 1} + 12nx \quad (14)$$

ja edelleen, yhtälön (1) nojalla

$$12nx = l + (k - 1) \sum_{i=1}^{12n} l_i = l + l(k^{12n} - 1) - x \frac{k^{12n} - 1}{k - 1} + 12nx \quad (15)$$

josta saadaan maksettavan kuukausierän suuruudeksi

$$x = \frac{(k - 1)k^{12n}l}{k^{12n} - 1}. \quad (16)$$