

40. Kehitä kosini sarjaksi yhdeksänteen asteeseen asti. Vertaa sitä esimerkin sinin sarjakehitelmään.

```
In[116]:= c = Series[Cos[x], {x, 0, 9}]
```

```
Out[116]= 1 -  $\frac{x^2}{2}$  +  $\frac{x^4}{24}$  -  $\frac{x^6}{720}$  +  $\frac{x^8}{40320}$  +  $O[x]^{10}$ 
```

41. Laske yhteen sinin ja kosinin sarjakehitelmien neliöt. Mitä pitäisi tulla tulokseksi ja mitä saat?

```
In[117]:= s = Series[Sin[x], {x, 0, 9}]
```

```
Out[117]= x -  $\frac{x^3}{6}$  +  $\frac{x^5}{120}$  -  $\frac{x^7}{5040}$  +  $\frac{x^9}{362880}$  +  $O[x]^{10}$ 
```

```
In[119]:= c^2 + s^2
```

```
Out[119]= 1 +  $O[x]^{10}$ 
```

42. Piirrä sinin kolmannen, viiden, seitsemännen ja yhdeksännen asteen sarjakehitelmien kuvaajat ja vertaa niitä tarkkaan kuvaajaan.

```
s3 = Series[Sin[x], {x, 0, 3}]
```

```
s5 = Series[Sin[x], {x, 0, 5}]
```

```
s7 = Series[Sin[x], {x, 0, 7}]
```

```
s9 = Series[Sin[x], {x, 0, 9}]
```

```
x -  $\frac{x^3}{6}$  +  $O[x]^4$ 
```

```
x -  $\frac{x^3}{6}$  +  $\frac{x^5}{120}$  +  $O[x]^6$ 
```

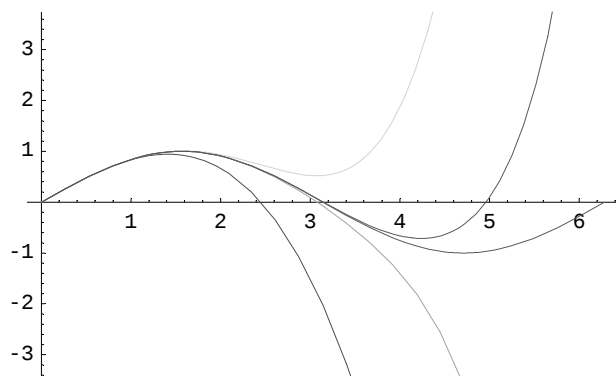
```
x -  $\frac{x^3}{6}$  +  $\frac{x^5}{120}$  -  $\frac{x^7}{5040}$  +  $O[x]^8$ 
```

```
x -  $\frac{x^3}{6}$  +  $\frac{x^5}{120}$  -  $\frac{x^7}{5040}$  +  $\frac{x^9}{362880}$  +  $O[x]^{10}$ 
```

```
Normal[{s3, s5, s7, s9}]
```

```
{x -  $\frac{x^3}{6}$ , x -  $\frac{x^3}{6}$  +  $\frac{x^5}{120}$ , x -  $\frac{x^3}{6}$  +  $\frac{x^5}{120}$  -  $\frac{x^7}{5040}$ , x -  $\frac{x^3}{6}$  +  $\frac{x^5}{120}$  -  $\frac{x^7}{5040}$  +  $\frac{x^9}{362880}$ }
```

```
Plot[{%37[[1]], %37[[2]], %37[[3]], %37[[4]], Sin[x]}, {x, 0, 2*Pi},
PlotStyle -> {Hue[0], Hue[0.2], Hue[0.4], Hue[0.6], Hue[0.8]}]
```



- Graphics -

43. Kehitä sini sarjakehitelmäksi pisteen $x=1$ ympäristössä kuudennen asteen termejä myöten. Esitä tulos polynomina käyttäen Expand-komentoa.

```
sini = Series[Sin[x], {x, 1, 6}]
```

$$\begin{aligned} \sin[1] + \cos[1] (x-1) - \frac{1}{2} \sin[1] (x-1)^2 - \frac{1}{6} \cos[1] (x-1)^3 + \\ \frac{1}{24} \sin[1] (x-1)^4 + \frac{1}{120} \cos[1] (x-1)^5 - \frac{1}{720} \sin[1] (x-1)^6 + 0[x-1]^7 \end{aligned}$$

```
Normal[%]
```

$$\begin{aligned} (-1+x) \cos[1] - \frac{1}{6} (-1+x)^3 \cos[1] + \frac{1}{120} (-1+x)^5 \cos[1] + \\ \sin[1] - \frac{1}{2} (-1+x)^2 \sin[1] + \frac{1}{24} (-1+x)^4 \sin[1] - \frac{1}{720} (-1+x)^6 \sin[1] \end{aligned}$$

```
Expand[%]
```

$$\begin{aligned} -\frac{101 \cos[1]}{120} + \frac{13}{24} x \cos[1] + \frac{5}{12} x^2 \cos[1] - \frac{1}{12} x^3 \cos[1] - \\ \frac{1}{24} x^4 \cos[1] + \frac{1}{120} x^5 \cos[1] + \frac{389 \sin[1]}{720} + \frac{101}{120} x \sin[1] - \frac{13}{48} x^2 \sin[1] - \\ \frac{5}{36} x^3 \sin[1] + \frac{1}{48} x^4 \sin[1] + \frac{1}{120} x^5 \sin[1] - \frac{1}{720} x^6 \sin[1] \end{aligned}$$

```
Together[%]
```

$$\begin{aligned} \frac{1}{720} (-606 \cos[1] + 390 x \cos[1] + 300 x^2 \cos[1] - \\ 60 x^3 \cos[1] - 30 x^4 \cos[1] + 6 x^5 \cos[1] + 389 \sin[1] + 606 x \sin[1] - \\ 195 x^2 \sin[1] - 100 x^3 \sin[1] + 15 x^4 \sin[1] + 6 x^5 \sin[1] - x^6 \sin[1]) \end{aligned}$$

44. Tutki myös jonkin muun funktion sarjakehitelmien tarkkuutta muunnellen astelukua.

```
loka1 = Series[Log[x], {x, 1, 4}]
```

$$(x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3 - \frac{1}{4} (x-1)^4 + 0[x-1]^5$$

```
loka2 = Series[Log[x], {x, 1, 7}]
```

$$(x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3 - \frac{1}{4} (x-1)^4 + \frac{1}{5} (x-1)^5 - \frac{1}{6} (x-1)^6 + \frac{1}{7} (x-1)^7 + 0[x-1]^8$$

```
loka3 = Series[Log[x], {x, 1, 10}]
```

$$(x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3 - \frac{1}{4} (x-1)^4 + \frac{1}{5} (x-1)^5 - \frac{1}{6} (x-1)^6 + \frac{1}{7} (x-1)^7 - \frac{1}{8} (x-1)^8 + \frac{1}{9} (x-1)^9 - \frac{1}{10} (x-1)^{10} + O[x-1]^{11}$$

45. Kokeile kehittää jokin määrittelemätön funktio f[x] sarjakehitelmäksi. Mitä saat tulokseksi?

```
Clear[f]
```

```
funk = Series[f[x], {x, a, 10}]
```

$$f[a] + f'[a] (x-a) + \frac{1}{2} f''[a] (x-a)^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}[a] (x-a)^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}[a] (x-a)^4 + \frac{1}{120} f^{(5)}[a] (x-a)^5 + \frac{1}{720} f^{(6)}[a] (x-a)^6 + \frac{f^{(7)}[a] (x-a)^7}{5040} + \frac{f^{(8)}[a] (x-a)^8}{40320} + \frac{f^{(9)}[a] (x-a)^9}{362880} + \frac{f^{(10)}[a] (x-a)^{10}}{3628800} + O[x-a]^{11}$$

Eli saatiin siis f:n Taylorin sarja pisteen a ympäristössä.

46. Esimerkkinä singulaarisista eli ns. Laurentin sarjakehitelmistä kehitä funktio $e^x/(x-1)$ sarjaksi pisteen $x=1$ ympäristössä. Mathematican komento on sama kuin Taylorin sarjakehitelmän tapauksessa.

```
eka = Series[E^x / (x - 1), {x, 1, 10}]
```

$$\frac{e}{x-1} + e + \frac{1}{2} e (x-1) + \frac{1}{6} e (x-1)^2 + \frac{1}{24} e (x-1)^3 + \frac{1}{120} e (x-1)^4 + \frac{1}{720} e (x-1)^5 + \frac{e (x-1)^6}{5040} + \frac{e (x-1)^7}{40320} + \frac{e (x-1)^8}{362880} + \frac{e (x-1)^9}{3628800} + \frac{e (x-1)^{10}}{39916800} + O[x-1]^{11}$$

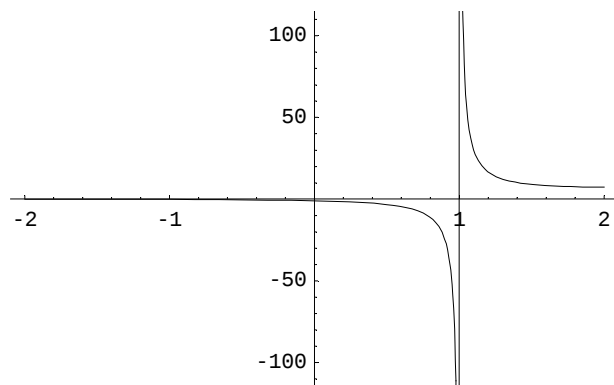
47. Muunna kehitelmä Normal-funktion avulla normaaliin lausekkeen muotoon kuvan piirtämistä varten ja piirrä kuva.

```
toka = Normal[eka]
```

General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "toka" is similar to existing symbol "loka".

$$e + \frac{e}{-1+x} + \frac{1}{2} e (-1+x) + \frac{1}{6} e (-1+x)^2 + \frac{1}{24} e (-1+x)^3 + \frac{1}{120} e (-1+x)^4 + \frac{1}{720} e (-1+x)^5 + \frac{e (-1+x)^6}{5040} + \frac{e (-1+x)^7}{40320} + \frac{e (-1+x)^8}{362880} + \frac{e (-1+x)^9}{3628800} + \frac{e (-1+x)^{10}}{39916800}$$

```
Plot[toka, {x, -2, 2}]
```



- Graphics -

48. Osoita, että suhteellisuusteorian mukaisesta energian lausekkeesta $E = m c^2$ saadaan ei-relativistinen liike-energian lauseke $E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$, kun liikemassan m ja lepomassan m_0 välille voidaan johtaa relaatio $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$.

```
Clear[m0, c, v]
```

```
Series[m0 c^2 / Sqrt[1 - v^2 / c^2], {v, 0, 2}]
```

$$c^2 m_0 + \frac{m_0 v^2}{2} + O[v]^3$$