

Snookerin kuningas

Pikku Niko-Petteri haluaa uudeksi snookerin kuninkaaksi. Epävarmana taidoistaan hän turvautuu fysiikan apuun ja laskee miten hänen on tehtävä lyöntinsä onnistuakseen. Tehtävänäsi tässä harjoitustyössä on tehdä tarvittavat laskut Mathematicaa käyttäen.

Pallot ovat aseteltuina kuten kuvassa 1. Niko-Petterin on tehtävä pussitus, jossa musta pallo on lyötävä kulmapussiin. Pallot ovat samanlaisia ja niiden massa $M = 150$ g ja säde $R = 5.4$ cm.

1. Tehtävä

Ensimmäinen tehtäväsi on laskea, kuinka suuren alkunopeuden musta pallo tarvitsee vieriäkseen pussiin. Oletetaan, että palloa hidastava voima on vakio ja syntyy vierimiskitkasta,

$$F_r = \mu_r Mg, \quad (1)$$

missä vierimiskitkakerroin $\mu_r = 0.01$ ja $g = 9.81$ m/s². Vieriessään pöydällä kitkaa F_r vastaan pallo tekee työn

$$W = F_r s, \quad (2)$$

missä s on pallon kulkema matka. Pallon liike-energia koostuu eteenpäin suuntauvan liikkeen energiasta T^{trans} ja pyörimisliikkeen energiasta T^{rot} ,

$$T = T^{\text{trans}} + T^{\text{rot}} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2, \quad (3)$$

missä v ja ω ovat pallon nopeuden ja kulmanopeuden suuruudet, ja J hitausmomentti,

$$J = \frac{2}{5}MR^2. \quad (4)$$

Jos pallo vierii liukumatta, sen kulmanopeus on

$$\omega = \frac{v}{R}. \quad (5)$$

Tehtäväsi siis on

1. Ratkaise yhtälö $W = T$ nopeuden v :n suhteen sekä symbolisesti että numeerisesti.
2. Piirrä pallon kokonaisliike-energian kuvaaja nopeuden funktiona

2. Tehtävä

Toinen tehtäväsi on ratkaista valkoisen ja mustan pallon nopeudet ja liike-energiat sellaisen osuman jälkeen, jolla musta pallo uppoaa pussiin. Oletetaan, että saatu liike-energia riittää vierittämään mustan pallon pussiin.

Olkon valkoisen liikemäärä ja liike-energia juuri ennen törmäystä $\mathbf{p}_w = m\mathbf{v}_w$ ja $T_w = 1/2mv_w^2$, ja sen jälkeen $\mathbf{p}'_w = m\mathbf{v}'_w$ ja $T'_w = 1/2mv'^2_w$. Musta pallo on levossa ennen osumaa, jolloin $\mathbf{p}'_b = 0$ ja $T_b = 0$. Vastaavasti merkitään lopputilanteessa mustalle pallolle $\mathbf{p}'_b = m\mathbf{v}'_b$ ja $T'_b = 1/2mv'^2_b$. Oletetaan, törmäys ei ole täysin elastinen, vaan pieni osa liike-energiasta $E_{\text{inel}} > 0$ on hävinnyt osuman jälkeen. Silloin kun pallojen välillä ei ole kitkaa, pallojen pyörimisliikkeen energia T^{rot} säilyy ja häviää yhtälöistä.

$$\mathbf{p}_w = \mathbf{p}'_w + \mathbf{p}'_b, \quad (6)$$

$$T^{\text{trans}}_w = T^{\text{trans}'}_w + T^{\text{trans}'}_b - E_{\text{inel}}. \quad (7)$$

Jotta pallo lähtisi suoraan kohti kulmapussia, täytyy nopeusvektorin $\mathbf{v}_b'$ muodostaa 225° asteen kulma x -akseliin nähden. Tämä ehto toteutuu, kun $v'_{bx} = v'_{by} < 0$, kuten kuvasta 1 voi nähdä. Yhdessä yhtälöiden (7) saamme siis yhtälöryhmän

$$mv_{wx} = mv'_{wx} + mv'_{bx} \quad (8a)$$

$$mv_{wy} = mv'_{wy} + mv'_{by} \quad (8b)$$

$$\frac{1}{2}m(v_{wx}^2 + v_{wy}^2) = \frac{1}{2}m(v'_{wx}{}^2 + v'_{wy}{}^2) + \frac{1}{2}m(v'_{bx}{}^2 + v'_{by}{}^2) - E_{\text{inel}} \quad (8c)$$

$$v'_{bx} = v'_{by}. \quad (8d)$$

Lisäksi meitä kiinnostaa tietää minkä kulman valkoisen ja mustan pallon nopeusvektorit muodostavat osuman jälkeen. Tämä voidaan ratkaista vektoreiden pistetulosta

$$\mathbf{v}_b' \cdot \mathbf{v}_w' = |\mathbf{v}_b| |\mathbf{v}_w| \cos \theta,$$

missä θ on kulma, josta olemme kiinnostuneita. Auki-kirjoitettuna ylläoleva yhtälö on

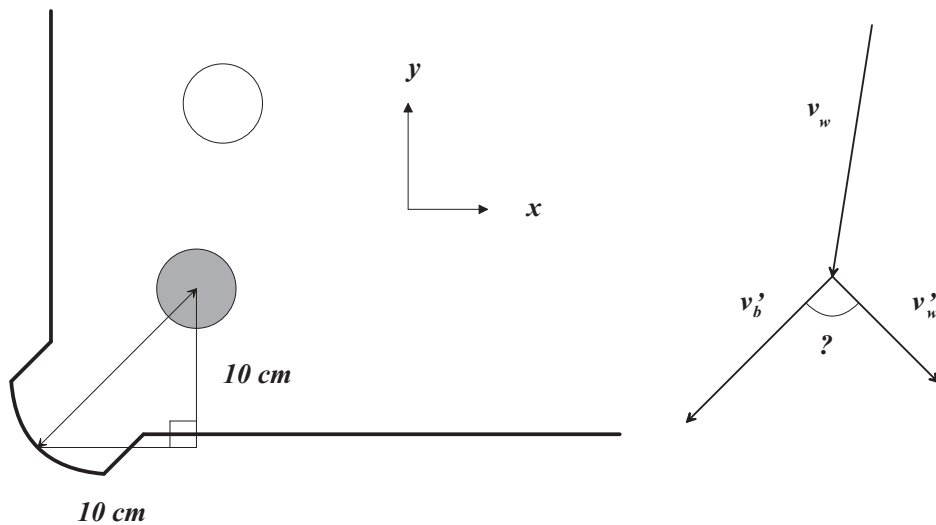
$$\frac{v'_{bx}v'_{wx} + v'_{by}v'_{wy}}{\sqrt{v'_{bx}{}^2 + v'_{by}{}^2} \sqrt{v'_{wx}{}^2 + v'_{wy}{}^2}} = \cos \theta. \quad (9)$$

Tee seuraavat laskut:

- Oletetaan aluksi, että törmäys on täysin elastinen, eli $E_{\text{inel}} = 0$. Ratkaise mustan ja valkoisen pallon loppunopeudet analyttisesti yhtälöryhmästä (8). Sijoita saamasi tulos yhtälöön (9) ja ratkaise kulma θ . Anna vastauksena (a) pallojen loppunopeudet valkoisen pallon alkunopeuden funktiona ja (b) loppunopeuksien välinen kulma θ .
- Oletetaan, että valkoinen pallo osuu mustaan nopeudella $\mathbf{v} = (-0.2, -1.25)$ m/s, ja että yksi prosentti liike-energiasta häviää törmäyksessä,

$$E_{\text{inel}} = 0.01 \cdot T_w^{\text{trans}}.$$

Ratkaise yhtälöryhmä (8) numeerisesti. Sijoita saamasi tulos yhtälöön (9) ja ratkaise numeerisesti kulma θ . Anna vastauksena (a) pallojen loppunopeudet annetulla valkoisen pallon alkunopeudella ja (b) loppunopeuksien välinen kulma θ . Kuinka monella asteella (1)-kohdan tulos muuttuu?



Kuva 1: Niko-Petterin tilanne, sekä pallojen nopeudet skemaattisesti.