

Harjoitus 7 -- Ratkaisut

1

Solve osaa ratkaista polynomiyhtälöitä, ainakin astelukuun 4 asti. Erikoistapauksissa korkeammankin asteen yhtälöt ratkeavat.

```
Clear[a, b, c, d, e, x];
```

```
Solve[a x^3 + b x^2 + c == 0, x]
```

```
Solve[x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x]
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{b}{3a} + \frac{2^{1/3} b^2}{3a \left(-2b^3 - 27a^2c + 3\sqrt{3} \sqrt{4a^2b^3c + 27a^4c^2} \right)^{1/3}} + \frac{\left(-2b^3 - 27a^2c + 3\sqrt{3} \sqrt{4a^2b^3c + 27a^4c^2} \right)^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3} a} \right\}, \right.$$

$$\left\{ x \rightarrow -\frac{b}{3a} - \frac{(1 + i\sqrt{3}) b^2}{3 \cdot 2^{2/3} a \left(-2b^3 - 27a^2c + 3\sqrt{3} \sqrt{4a^2b^3c + 27a^4c^2} \right)^{1/3}} - \frac{(1 - i\sqrt{3}) \left(-2b^3 - 27a^2c + 3\sqrt{3} \sqrt{4a^2b^3c + 27a^4c^2} \right)^{1/3}}{6 \cdot 2^{1/3} a} \right\},$$

$$\left\{ x \rightarrow -\frac{b}{3a} - \frac{(1 - i\sqrt{3}) b^2}{3 \cdot 2^{2/3} a \left(-2b^3 - 27a^2c + 3\sqrt{3} \sqrt{4a^2b^3c + 27a^4c^2} \right)^{1/3}} - \frac{(1 + i\sqrt{3}) \left(-2b^3 - 27a^2c + 3\sqrt{3} \sqrt{4a^2b^3c + 27a^4c^2} \right)^{1/3}}{6 \cdot 2^{1/3} a} \right\}$$

$$\{ \{x \rightarrow -1\}, \{x \rightarrow -i\}, \{x \rightarrow i\}, \{x \rightarrow -(-1)^{1/4}\}, \{x \rightarrow (-1)^{1/4}\}, \{x \rightarrow -(-1)^{3/4}\}, \{x \rightarrow (-1)^{3/4}\} \}$$

Esim. trigonometrinen funktio ja eksponenttifunktion kanssa Solve saattaa kohdata vaikeuksia, mutta voi pärjätäkin.

```
Solve[Exp[x^2] == 2, x]
```

Solve::ifun: Inverse functions are being used by Solve, so

some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\sqrt{\text{Log}[2]} \right\}, \left\{ x \rightarrow \sqrt{\text{Log}[2]} \right\} \right\}$$

NSolve toimii kuten Solve, mutta antaa numeerisen approksimaation:

```
q = NSolve[10 x^3 - x == 5, x]
```

$$\{ \{x \rightarrow -0.41783 - 0.650958 i\}, \{x \rightarrow -0.41783 + 0.650958 i\}, \{x \rightarrow 0.835661\} \}$$

Ratkaisu voidaan ottaa käyttöön sijoitusoperaattorilla /.

```

x0 = x /. q[[1]]
(* q[[1]] antaa edellisen sääntölistan 1. alkion, {x→-0.417830-0.650958 i} *)
-0.41783 - 0.650958 i

```

Reduce muokkaa loogisia väittämiä yksinkertaisempaan muotoon, mikä joissain tapauksissa voi vaikuttaa yhtälön ratkaisemiselta.

```

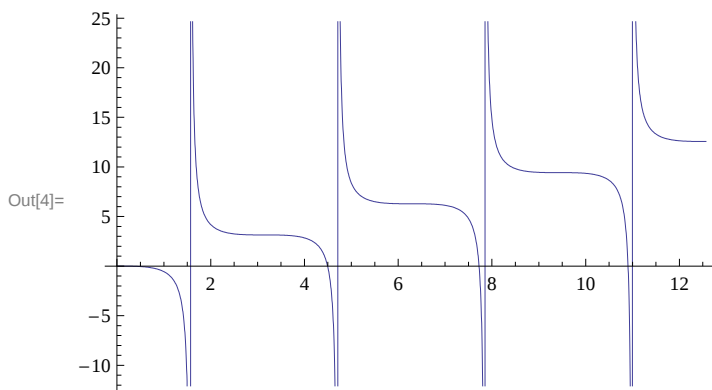
Reduce[x2 == x]
x == 0 || x == 1

Reduce[{x == -x + 4, x2 == -x + a}]
x == 2 && a == 6

```

Hankalan mallisia yhtälöitä voi ratkaista numeerisesti FindRoot-funktiolla. Se toimii kaikenlaisiin yhtälöihin, myös useammasta käskystä koostuvien funktioiden nollakohtien etsimiseen. Se vaatii alkuarvauksen (vrt. Newtonin menetelmä) tai kaksi (välipuolitusmenetelmä).

```
In[4]:= Plot[x - Tan[x], {x, 0, 4 π}]
```



```
In[5]:= FindRoot[x == Tan[x], {x, 4}]
```

```
Out[5]= {x → 4.49341}
```

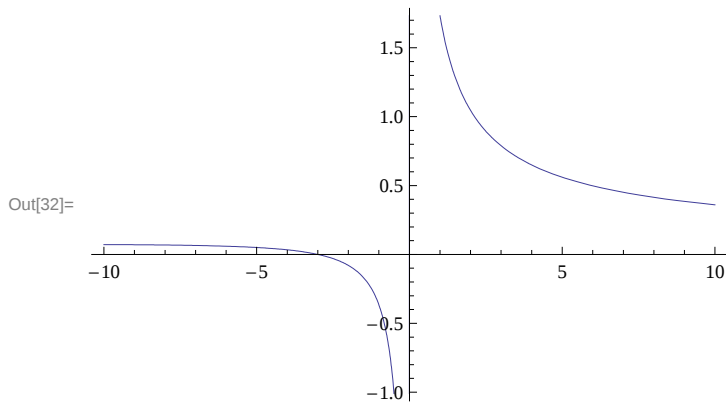
Seuraava funktio on täysin hatusta vedetty.

```

In[31]:= f[ε_] := Module[{γ, δ},
  {γ, δ} = x /. Solve[ε x2 - √ε x + 1 == 0, x];
  If[Abs[δ] > 0, δ = δ2, γ = γ2];
  Im[δ - γ] // N
];

```

```
In[32]:= Plot[f[ε], {ε, -10, 10}]
```

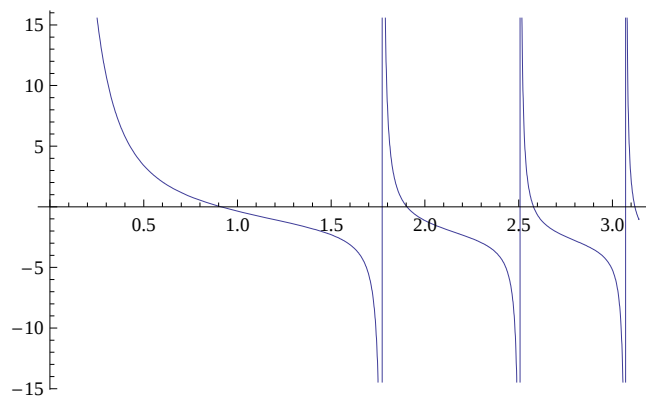


```
In[33]:= FindRoot[f[ε], {ε, -4, -2}]
```

Out[33]= {ε → -2.}

2

```
f[x_] = Cot[x^2] - x;
Plot[f[x], {x, 0, π}]
```



Etsitään 1. nollakohta.

```
x0 = 0.6; (*alkuarvaus*)
```

Tangentti pisteeseen $(x_0, f(x_0))$:

```
y = f'[x0] (x - x0) + f[x0];
```

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste: (ensimmäisen asteen polynomilla (suoralla) on vain yksi nollakohta, joten Solve-funktio antaa varmasti vain yhden ratkaisun. Se antaa ratkaisun muodossa $\{x \rightarrow \dots\}$. Flatten-funktion poistaa ylimääräisen aaltosulkeet.

```
x1 = x /. Flatten[Solve[y == 0, x]]
```

```
0.792761
```

Piirretään tangentti pisteeseen $(x_1, f(x_1))$, lasketaan sen nollakohta x_2 , jne... Etsitään nollakohta tarkkuuteen 10^{-10} asti.

```

xi = x1;
While[Abs[f[xi]] > 10-10 (*jatketaan etsintään jos f[xi] poikkeaa nolasta yli 10-10*),
  y = f'[xi] (x - xi) + f[xi];
  (*tangentin yhtälöä ja sen nollakohdan ratkaisua ei tarvitsisi kirjoittaa,
  sillä nollakohdallekin on olemassa kaava*)
  xi = x /. Flatten[Solve[y == 0, x]]; Print[xi]

```

0.897138

0.91166

0.911851

0.911851

Algoritmi vaati vain muutaman kierroksen.

Newtonin menetelmä voidaan kirjoittaa omaksi funktiokseen, joka ottaa argumentikseen alkuarvauksen. Käytetään tässä tangentin nollakohdan kaavaa (ks. luennot)

```

newton[z_] := (xi = z; While[Abs[f[xi]] > 10-10,
  xi = xi -  $\frac{f[xi]}{f'[xi]}$ ]; xi)
newton[0.3]
0.911851

```

3

Lähtien liikkeelle jostain muuttujan arvosta z_0 , lasketaan funktion arvoja pisteissä $z_i = z_0 + i h$, kunnes löydetään pari, jolle $f(z_i) f(z_{i+1}) < 0$, ts. funktio vaihtaa merkkiään välillä $[z_i, z_{i+1}]$. Sovelletaan sitten Newtonin menetelmää alkuarvona z_i .

```

z0 = 0.1;
h = 0.1;
While[f[z0 + h] f[z0] > 0, Print[z0]; z0 += h]

```

0.1

0.2

0.3

0.4

0.5

0.6

0.7

0.8

newton[z0]

0.911851

Huom. Newtonin menetelmä ei suppene epäjatkuvuuskohtaan. Funktio $\cot x^2 - x$ vaihtaa merkkiään välillä $[1.7, 1.8]$, mutta jos em. hakua sovelletaan tähän väliin, Newtonin menetelmä peruuttaa edelliseen nollakohtaan (ks. kuvaaja)

```
z0 = 1.0;
```

```

While[f[z0 + h] f[z0] > 0, z0 += h]
newton[z0]

0.911851

```

Kirjoitetaan koko hakuprosessi omaksi funktiokseen:

```

newtonhaku[z_] := Module[{z0},
  z0 = z;
  While[f[z0 + h] f[z0] > 0, z0 += h];
  newton[z0]

newtonhaku[1.9]

1.904

```

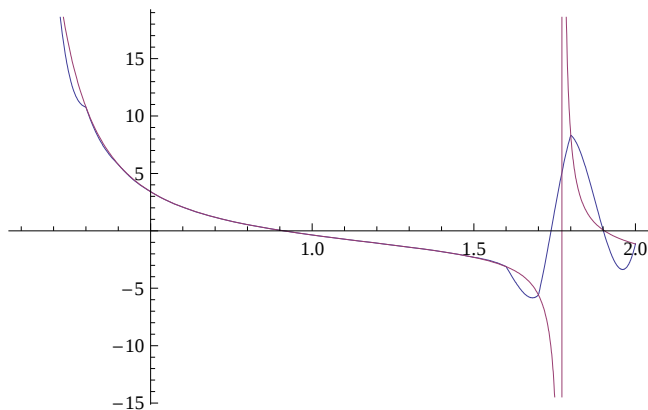
4

Muodostetaan interpoloituva funktio tasaväliseen datapisteistöön. (huom. interpoloivalla funktiolla ei ole epäjatkuvuuskohtia)

```

a = 0.1; b = 2.0;
fx = Table[{x, f[x]}, {x, a, b, 0.1}];
j = Interpolation[fx];
Plot[{j[x], f[x]}, {x, a, b}]

```



Muutetaan ratkaisufunktion rakennetta. Funktio voi ottaa argumentikseen toisen funktion.

```

findroot[g_, w_] := Module[{xi}, xi = w; While[Abs[g[xi]] > 10-10,
  xi = xi -  $\frac{g[xi]}{g'[xi]}$ ];
  xi]

findroot[f, 0.9]

0.911851

```

Interpoloivalle funktiolle:

```

findroot[j, 0.8]

0.911817

```

Jotta tätä funktiota voisi käyttää, on nimettävä tutkittava funktio.

```
findroot[Cos, 1.5]
```

```
1.5708
```

5

Välinpuolitusmenetelmä. Kaksi alkuarvausta a ja b , $a < b$, joissa f saa erimerkkiset arvot:

```
a = 1.8; b = 2.4;
```

```
f[a]
```

```
f[b]
```

```
8.32902
```

```
-4.13371
```

Etsitään nollakohta tarkkuudella 10^{-10} . Lasketaan funktion arvo välin keskipisteessä x_0 . Jos $f(x_0) f(a) < 0$, niin $f(x_0)$ ja $f(a)$ ovat erimerkkiset, ja f vaihtaa merkkiään välillä $[a, x_0]$. Tarkasteltavan välin siirto tapahtuu *sijoittamalla välin keskipiste toiseksi päätepisteeksi*. Yo. tapauksessa asetettaisiin $b \rightarrow x_0$.

```
While[Abs[a - b] > 10-10,
  xi = (a + b) / 2;
  If[f[xi] f[a] < 0, b = xi, a = xi];
];
```

```
xi
```

```
1.904
```

Kirjoitetaan tämä omaksi funktiokseen:

```
bisection[f_, z_, w_] :=
Module[{a, b, xi},
  a = z;
  b = w;
  While[Abs[a - b] > 10-10,
    xi = (a + b) / 2;
    If[f[xi] f[a] < 0, b = xi, a = xi];
  ];
  xi]
```

```
bisection[f, 1.8, 2.4]
```

```
1.904
```