

Harjoitus 9 -- ratkaisut

1

Sijoitetaan yhtälön ratkaisufunktio funktioksi r.

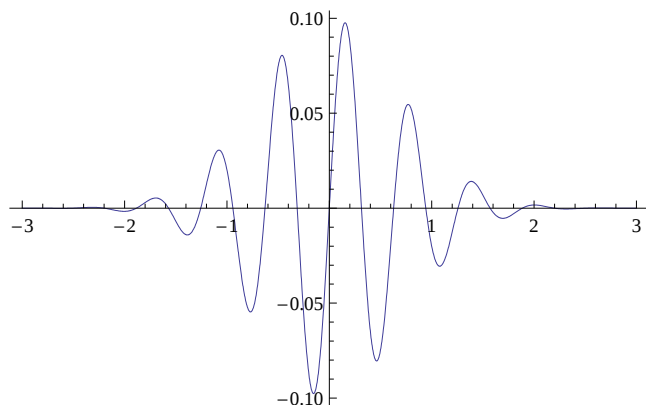
```
eq = y''[x] + 4 x y'[x] + (102 + 4 x^2) y[x] == 0;  
r[x_] = y[x] /. Flatten[DSolve[{eq, y[0] == 0, y'[0] == 1}, y[x], x]]  
  
- 1/20 i e^{-x (10 i + x)} (-1 + e^{20 i x})
```

Simplify-funktio ei osaa käsitellä kompleksisia eksponentteja. ComplexExpand laskee ne auki Eulerin kaavalla $e^{ix} = \cos x + i \sin x$:

```
r[x_] = ComplexExpand[r[x]] // Simplify  
  
1/10 e^{-x^2} Sin[10 x]
```

Funktio onkin reaalinen!

```
Plot[r[x], {x, -3, 3}, PlotRange -> All]
```



Funktion kuvaaja on sinikäyrä, jota *moduloi* Gaussin funktio e^{-x^2} . Tämän kaltaisia funktioita saattaa tulla vastaan esim. aaltoliikeopissa, optiikassa tai kvanttimekaniikassa (aaltopaketti).

2

Differenssimenetelmässä lähdetään liikkeelle siitä, että määrätään ne pisteet (muuttujan arvot), joissa yhtälölle etsitään ratkaisua. Yhtälön ratkaisu halutaan selvittää alueessa $-3 < x < 3$, kun tiedetään funktion käyttäytyminen pisteessä $x = 0$. Ratkaisuprosessin on alettava pisteestä $x = 0$ ja edettävä positiiviseen ja negatiiviseen suuntaan. Prosessin alkuun voidaan päästä monella tavalla.

Olkoot $x_0 = 0$ ja $x_n = 3$. Käytetään ensimmäisen indeksin arvona nollaa, sillä siitä on helppo lähteä sekä positiiviseen että negatiiviseen suuntaan. Alueessa $0 < x \leq 3$ ratkaisua edustaa y_i , $i = 1, \dots, n$ ja alueessa $-3 \leq x < 0$ ratkaisu on y_i kun $i = -1, \dots, -n$. Muodostetaan differenssiyhtälö ja ratkaistaan y_{i+1} :

$$y_{i+1} = \frac{1}{\frac{1}{h^2} + \frac{2x_i}{h}} \left(y_i \left(\frac{2}{h^2} - 102 - 4x_i^2 \right) + y_{i-1} \left(\frac{2x_i}{h} - \frac{1}{h^2} \right) \right) \quad (1)$$

ja y_{i-1} :

$$y_{i-1} = \frac{1}{\frac{1}{h^2} - \frac{2x_i}{h}} \left(y_i \left(\frac{2}{h^2} - 102 - 4x_i^2 \right) - y_{i+1} \left(\frac{2x_i}{h} + \frac{1}{h^2} \right) \right) \quad (29)$$

Alkuehtoina annettiin $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 1$, eli $y_0 = 0$ ja $y_{\pm 1} = y_0 \pm y'(0)h = y_0 \pm h$. Huom. nyt $x_i = x_0 + ih$, eikä $x_0 + (i-1)h$, kuten aiemmin.

(huom. kannattaa kirjoittaa desimaalipisteet eksplisiittisesti näkyviin. Muuten *Mathematica* alkaa murskata murtolukuja ja laskussa kestää kauan.)

```
n = 1000; x[0] = 0.0; x[n] = 3.0; x[-n] = -3; h = (x[n] - x[0]) / (n - 1);
Do [
  x[i] = x[0] + i h;
  x[-i] = x[0] - i h; ,
  {i, 1, n - 1}]
```

Alkuehdot:

```
y0 = 0; dy0 = 1;
y[0] = y0;
y[1] = y[0] + dy0 h;
y[-1] = y[0] - dy0 h;
```

Varsinainen ratkaisuprosessi: Positiiviseen suuntaan etenevä ratkaisu voidaan toteuttaa yhtälöllä (1), ja negatiivinenkin voitaisiin toteuttaa omassa Do-lausekkeessaan suoraan yhtälöllä (2). Toinen tapa on yhdistää Do-lausekkeet ja kirjoittaa negatiiviseen suuntaan mentäessä $i \rightarrow -i$, $i-1 \rightarrow -(i-1) = -i+1$ jne.

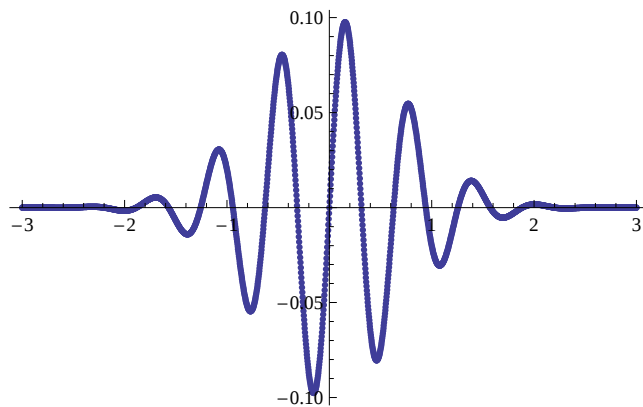
```
Do [
  y[i] = 1 / (1/h^2 + 2*x[i-1]/h) (y[i-1] (2/h^2 - 102 - 4*x[i-1]^2) + y[i-2] (-1/h^2 + 2*x[i-1]/h));
  y[-i] = 1 / (1/h^2 - 2*x[-i+1]/h) (y[-i+1] (2/h^2 - 102 - 4*x[-i+1]^2) - y[-i+2] (1/h^2 + 2*x[-i+1]/h)); ,
  {i, 2, n}]
```

Negatiiviseen suuntaan etenevä Do-lauseke voisi myös olla muotoa (huom. kun indeksin arvot *pienenevät*, on annettava askelpituus)

```
Do [
  y[i] = 1 / (1/h^2 - 2*x[i+1]/h) (y[i+1] (2/h^2 - 102 - 4*x[i+1]^2) - y[i+2] (1/h^2 + 2*x[i+1]/h)); ,
  {i, -2, -n}]
```

Piirretään likiratkaisun kuvaaja ja tarkka ratkaisu samaan kuvaajaan. Likiratkaisua ei erota tarkasta.

```
Show[ListPlot[Table[{x[i], y[i]}, {i, -n, n}], PlotRange → All],
Plot[r[t], {t, -3, 3}, PlotRange → All]]
```

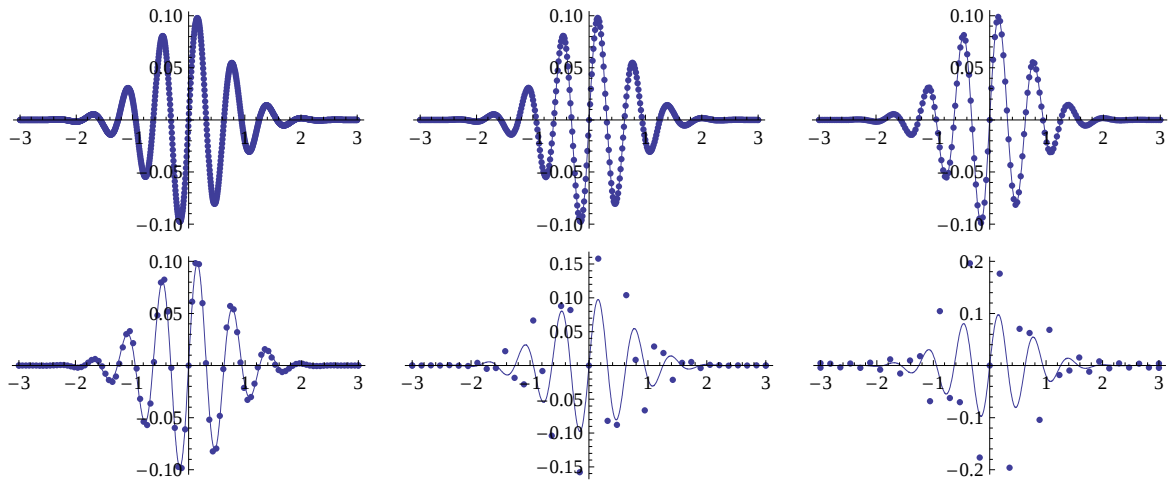


Pienennetään n :n arvoa ja katsotaan, kuinka likiratkaisun käy. Muodostetaan ratkaisuprosessista funktio, joka ottaa argumenttikseen tutkittavan n :n arvon.

```
examinesolution[m_] := (
  Clear[x, y];
  n = m;
  x[0] = 0.0; x[n] = 3.0; x[-n] = -3; h = (x[n] - x[0]) / (n - 1);
  Do[x[i] = x[0] + i h; x[-i] = x[0] - i h, {i, 1, n - 1}];
  y0 = 0; dy0 = 1; y[0] = y0; y[1] = y[0] + dy0 h; y[-1] = y[0] - dy0 h;
  Do[
    y[i] = (1 / (1/h^2 + 2 x[i-1]/h)) (y[i-1] (2/h^2 - 102 - 4 x[i-1]^2) + y[i-2] (-1/h^2 + 2 x[i-1]/h));
    y[-i] = (1 / (1/h^2 - 2 x[-i+1]/h)) (y[-i+1] (2/h^2 - 102 - 4 x[-i+1]^2) - y[-i+2] (1/h^2 + 2 x[-i+1]/h));
    {i, 2, n}];
  Show[ListPlot[Table[{x[i], y[i]}, {i, -n, n}], PlotRange → All],
    Plot[r[t], {t, -3, 3}, PlotRange → All]]
```

GraphicsGrid toimii samalla tavalla kuin GraphicsArray, jota on käytetty jo aiemmin.

```
GraphicsGrid[{Table[examinesolution[i], {i, {500, 200, 100}}],
  Table[examinesolution[i], {i, {50, 20, 18}}]}]
```



Kun $n \approx 18$, alkaa ratkaisu leviämään reuna-alueella käsiin. Tätä vastaava h :n arvo on

$$h_{18} = \frac{3}{18 - 1} // N$$

0.176471

Tarkka ratkaisu oli muotoa

$$\frac{1}{10} e^{-x^2} \sin 10 x,$$

ts. se oskilloi aaltoluvulla $k = 10$. Tästä saadaan aallonpituus $\lambda = \frac{2\pi}{k}$:

$$\lambda = \frac{2\pi}{10} // N$$

0.628319

Nyt h :n arvo on n. $1/3 \dots 1/4$ aallonpituutta.

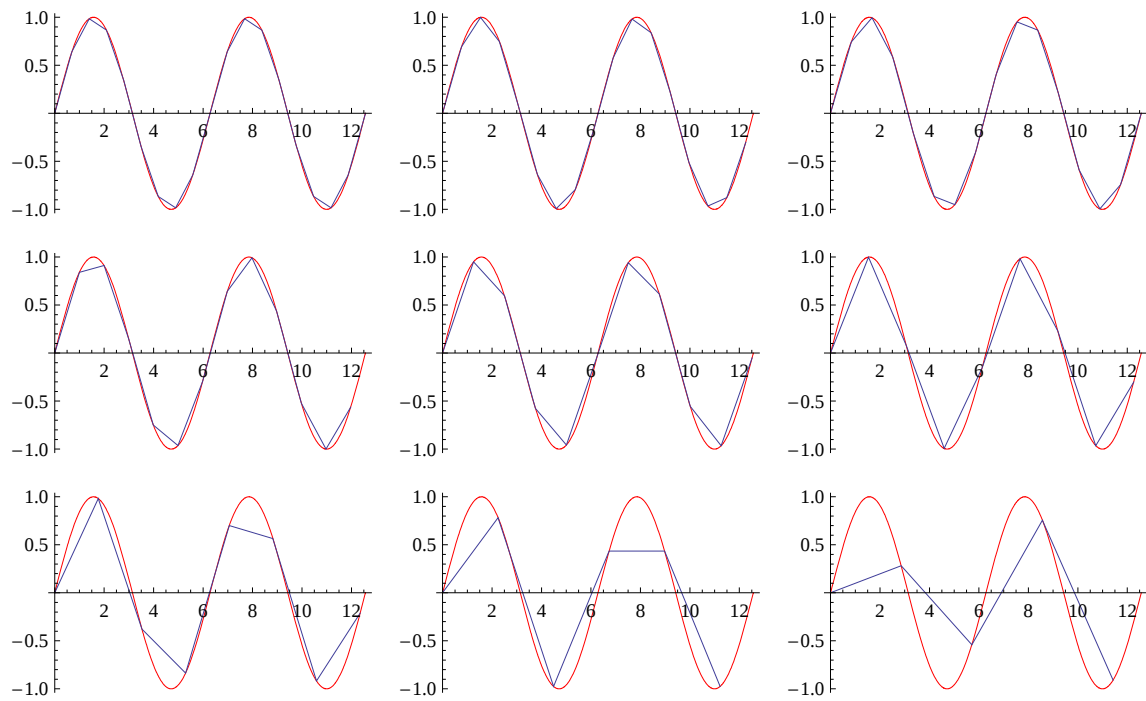
$$\lambda / h_{18}$$

3.56047

Jos oskilloivasta funktiosta otetaan näytteitä askelpituudella $h < \lambda/4$, oskillaatiot näkyvät vielä hyvin. Jos askelpituutta tästä vielä kasvatetaan, värähtelyjen muoto vääristyy ja saattaa jopa kadota kokonaan.

```
g[i_] := Show[Plot[Sin[z], {z, 0, 4 π}, PlotStyle → Red],
  ListPlot[Table[{z, Sin[z]}, {z, 0, 4 π,  $\frac{2\pi}{i}$ }], Joined → True]];
```

```
GraphicsGrid[Table[g[i], {i, {9, 8.2, 7.5}},
  Table[g[i], {i, {6.3, 5.02, 4.1}}, Table[g[i], {i, {λ/h18, 2.8, 2.2}}]]]
```



Edellisen kuvakollaasin viimeistä kuvaa vastaava askelpituus näkyy vasemmassa alakulmassa.