

Harjoitus 10

1. Tarkastellaan Maan vetovoiman alaisuudessa putoavaa kappaletta. Sen liikerataa kuvaa differentiaaliyhtälö

$$m\mathbf{r}''(t) = -G \frac{mM}{|\mathbf{r}(t)|^3} \mathbf{r}(t) - \gamma |\mathbf{r}'(t)| \mathbf{r}'(t) \quad (1)$$

missä (rajoitutaan tässä kahteen ulottuvuuteen) $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{x}} + y(t)\hat{\mathbf{y}}$ ($\hat{\mathbf{x}}$ ja $\hat{\mathbf{y}}$ ovat yksikkövektoreita), $|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ on kappaleen etäisyys Maan keskipisteestä, M on Maan massa ja G on gravitaatiovakio. Yhtälö (1) vastaa kahta kytkettyä, epälineaarista differentiaaliyhtälöä:

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\frac{GM}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{3/2}} x(t) - \frac{\gamma}{m} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} x'(t) \\ y''(t) &= -\frac{GM}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{3/2}} y(t) - \frac{\gamma}{m} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} y'(t) \end{aligned}$$

- a) Muodosta $\mathbf{r}(0)$, joka on on jossain R -säteisen pallon pinnalla (xy -tasossa R -säteisen ympyrän kehällä) ja $\mathbf{r}'(0)$, jonka suunta annetaan suhteessa Maan pintaan pisteessä $\mathbf{r}(0)$. Ratkaise yo. yhtälöt Mathematican valmiilla funktiolla `NDSolve`, kun $\gamma = 0$. Piirrä ratkaisusta $(x(t), y(t))$ kuvaaja. Kokeile eri lähtöpaikan ja nopeuden arvoja. Millä parametrien arvoilla saat kappaleen laskeutumaan lähtöpaikkaansa?
- b) Ota ilmanvastustermi mukaan ($\gamma \neq 0$). Etsi nyt parametreille sellaiset arvot, että kappale palaa lähtöpaikkaansa.
- c) Ratkaise tehtävä *differenssimenetelmällä*. Nyt yhtälöt ovat sen verran monimutkaisia, että x_{i+1} :tä ja y_{i+1} :tä ei saa suoraan ratkaistua. Tässä voidaan kuitenkin käyttää `FindRoot`-funktioita, tai ohjelmoida itse välinpuolitus- tai Newtonin algoritmi. Ratkaisu etenisi seuraavasti:

```
Do[{x[i+1], y[i+1]} = {x[i+1], y[i+1]} /.
  FindRoot[{
    (x[i+1] - 2 x[i] + x[i-1]) / h^2 + (G M x[i] / (x[i]^2 + y[i]^2)^(3/2)) == 0,
    (y[i+1] - 2 y[i] + y[i-1]) / h^2 + (G M y[i] / (x[i]^2 + y[i]^2)^(3/2)) == 0},
  {{x[i+1], x[i]}, {y[i+1], y[i]}}], {i, 2, n}] // Quiet
```