

Harjoitus 11 -- Ratkaisut

1

Ratkaistava yhtälö

$$eq = y''[x] + k^2 y[x] == 0;$$

Ratkaisuvälin pituus voi olla mitä tahansa (oltava numeerinen, jos käytetään NDSolvea)

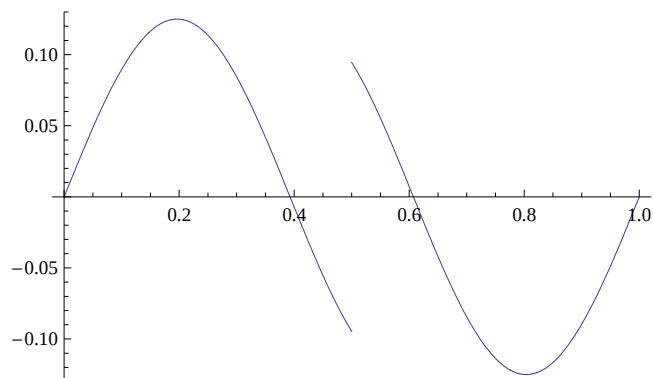
$$L = 1.0;$$

Aaltoluku $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, missä $\lambda = n \frac{L}{2}$, n kokonaisluku (tämä on tarkka ratkaisu, oletetaan, että tätä ei tiedetä). "Arvataan"

$$k1 = 8.0;$$

Ratkaisuprosessi: ratkaistaan yhtälö alueessa $[0, L/2]$ reunaehdoilla $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 1$, ja alueessa $[L/2, L]$ reunaehdoilla $y(L) = 0$ ja $y'(L) = \pm 1$ (ensin +1)

```
y0[x_] =  
  y[x] /. Flatten[NDSolve[{eq /. k -> k1, y[0] == 0.0, y'[0] == 1.0}, y[x], {x, 0.0, L/2}]];  
yinf[x_] = y[x] /. Flatten[  
  NDSolve[{eq /. k -> k1, y[L] == 0.0, y'[L] == 1.0}, y[x], {x, L/2, L}]];  
Show[Plot[y0[x], {x, 0, L/2}], Plot[yinf[x], {x, L/2, L}], PlotRange -> All]
```



Ratkaisun hyvyyttä voi arvioida erotuksen $y_0(L/2) - y_\infty(L/2)$ avulla. Huom. nyt funktioiden derivaatoilla on aina sama arvo pisteessä $L/2$.

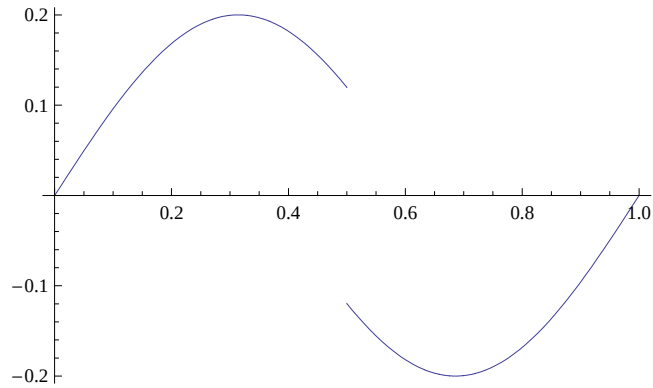
$$y0[L/2] - yinf[L/2]$$
$$-0.189201$$

Toinen alkuarvaus välinpuolitusmenetelmää varten:

```

k2 = 5.0;
y0[x_] =
  y[x] /. Flatten[NDSolve[{eq /. k → k2, y[0] == 0.0, y'[0] == 1.0}, y[x], {x, 0.0, L/2}]];
y∞[x_] = y[x] /. Flatten[
  NDSolve[{eq /. k → k2, y[L] == 0.0, y'[L] == 1.0}, y[x], {x, L/2, L}]];
Show[Plot[y0[x], {x, 0, L/2}], Plot[y∞[x], {x, L/2, L}], PlotRange → All]
y0[L/2] - y∞[L/2]

```



0.239389

Kirjoitetaan erotuksen lasku omaksi funktiokseen:

```

Clear[Δ]
Δ[k_] := Module[{},
  q0 = Flatten[NDSolve[{eq /. k → k, y[0] == 0.0, y'[0] == 1.0}, y[x], {x, 0.0, L/2}]];
  y0[x_] = y[x] /. q0;
  q∞ = Flatten[NDSolve[{eq /. k → k, y[L] == 0.0, y'[L] == 1.0}, y[x], {x, L/2, L}]];
  y∞[x_] = y[x] /. q∞;
  y0[L/2] - y∞[L/2]]
Δ[8.0]
Δ[5.0]
-0.189201
0.239389

```

Etsitään funktion Δ nollakohta (yhtälön ominaisarvo) tarkkuudella $1/1000000$:

```

k1 = 8.0; k2 = 5.0;
While[Abs[k1 - k2] > 10-6,
  k0 = (k1 + k2) / 2;
  If[Δ[k0] Δ[k2] < 0, k1 = k0, k2 = k0]];
k0
6.28319

```

Kirjoitetaan välinpuolitusmenetelmä omaksi funktiokseen (ks. harj. 7):

```

bisection[f_, a_, b_] := Module[{z1, z2},
  z1 = a;
  z2 = b;
  While[Abs[z1 - z2] > 10-6,
    z =  $\frac{z1 + z2}{2}$ ;
    If[f[z] f[z2] < 0, z1 = z, z2 = z];
  z];

bisection[Δ, 5.0, 8.0]
bisection[Δ, 8.0, 14.0]

6.28319
12.5664

```

Vastaava ominaisfunktio. Normitetaan ratkaisu niin, että sen suurin arvo on 1. Tätä koodia voisi vähän optimoida.

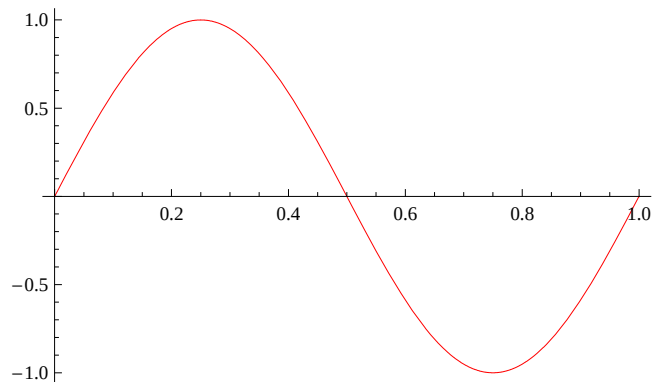
```

Remove[plotsolution]

plotsolution[k_, h_] := Module[{},
  q0 = Flatten[NDSolve[{eq /. k → κ, y[0] == 0.0, y'[0] == 1.0}, y[x], {x, 0.0, L/2}]];
  y0[x_] = y[x] /. q0;
  q∞ = Flatten[NDSolve[{eq /. k → κ, y[L] == 0.0, y'[L] == 1.0}, y[x], {x, L/2, L}]];
  y∞[x_] = y[x] /. q∞;
  η[x_] := y0[x] /. q0; 0 ≤ x ≤ L/2;
  η[x_] := y∞[x] /. q∞; L/2 < x ≤ L;
  ηmax = Part[NMaximize[η[x], x], 1];
  ξ[x_] = η[x] / ηmax;
  Show[Plot[ξ[x], {x, 0, L}, PlotStyle → Hue[h], PlotRange → All]]
]

plotsolution[k0, 1]

```



Lähdetään etsimään lisää ratkaisuja. Edetään ykkösen pituisin askelin kohti suurempia k :n arvoja. Jos kahdella peräkkäisellä k :lla lasketut Δ :n arvot ovat erimerkkiset, käytetään välinpuolitusmenetelmää.

```

k1 = 1.0;
i = 1;
While[i ≤ 10,
  If[Δ[k1] Δ[k1 + 1.0] < 0, κ[i] = bisection[Δ, k1, k1 + 1.0]; i++];
  k1 += 1.0;
]

```

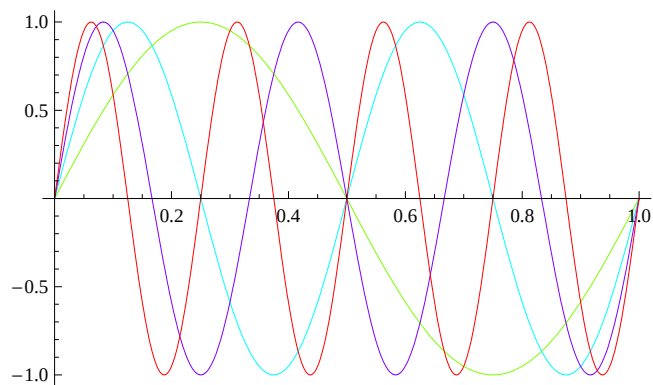
Kymmenen ensimmäistä ominaisarvoa (ne ovat $2\pi:n$ välein):

`?κ`

Global`κ

`κ[1] = 6.28319``κ[2] = 12.5664``κ[3] = 18.8496``κ[4] = 25.1327``κ[5] = 31.4159``κ[6] = 37.6991``κ[7] = 43.9823``κ[8] = 50.2655``κ[9] = 56.5487``κ[10] = 62.8319`

```
Do[g[i] = plotsolution[κ[i], i/4];, {i, 4}]
Show[Table[g[i], {i, 4}]]
```



Etsitään seuraavaksi reunaehtoa $y'(L) = -1$ vastaavat ratkaisut. Nyt käy niin, että funktioiden y_0 ja y_∞ arvot pisteessä $L/2$ ovat aina samat, joten riittää vertailla derivaattojen arvoja.

```
Σ[κ_] := Module[{ },
  q0 = Flatten[NDSolve[{eq /. k → κ, y[0] == 0.0, y'[0] == 1.0}, y[x], {x, 0.0, L/2}]];
  y0[x_] = y[x] /. q0;
  q∞ = Flatten[NDSolve[{eq /. k → κ, y[L] == 0.0, y'[L] == -1.0}, y[x], {x, L/2, L}]];
  y∞[x_] = y[x] /. q∞;
  y0'[L/2] - y∞'[L/2]

  k1 = 1.0;
  i = 1;
  While[i ≤ 10,
    If[Σ[k1] Σ[k1 + 1.0] < 0, λ[i] = bisection[Σ, k1, k1 + 1.0]; i++];
    k1 += 1.0;
  ]
]
```

Aaltoluvun arvot ovat taas $2\pi:n$ välein, mutta alkaen tällä kertaa π :stä. ($L:n$ matkalle mahtuu $n+1/2$ aallonpituutta)

`?λ`

Global`λ

λ[1] = 3.14159

λ[2] = 9.42478

λ[3] = 15.708

λ[4] = 21.9911

λ[5] = 28.2743

λ[6] = 34.5575

λ[7] = 40.8407

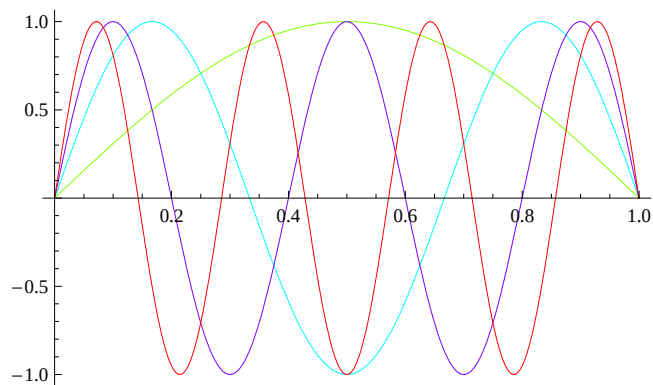
λ[8] = 47.1239

λ[9] = 53.4071

λ[10] = 59.6903

```
plotsolution2[x_, h_] := Module[{
  q0 = Flatten[NDSolve[{eq /. k → x, y[0] == 0.0, y'[0] == 1.0}, y[x], {x, 0.0, L/2}]];
  y0[x_] = y[x] /. q0;
  q∞ = Flatten[NDSolve[{eq /. k → x, y[L] == 0.0, y'[L] == -1.0}, y[x], {x, L/2, L}]];
  y∞[x_] = y[x] /. q∞;
  η[x_] := y0[x] /. x; 0 ≤ x ≤ L/2;
  η[x_] := y∞[x] /. x; L/2 < x ≤ L;
  ηmax = Part[NMaximize[η[x], x], 1];
  ξ[x_] = η[x] / ηmax;
  Show[Plot[ξ[x], {x, 0, L}, PlotStyle → Hue[h], PlotRange → All]]
]
```

```
Do[g[i] = plotsolution2[λ[i], i/4];, {i, 4}]
Show[Table[g[i], {i, 4}]]
```



Sama differenssimenetelmällä

Taulukko x:n arvoista, joilla ratkaisua etsitään: (luodaan pariton määrä pisteitä, jotta niistä voidaan määrätä keskimäinen, jossa ratkaisun hyvyttä voidaan tutkia.

```
Clear[x, y]
```

```

n = 101; x[1] = 0.0; x[n] = L; h =  $\frac{x[n] - x[1]}{n - 1}$ ;
Do[x[i] = x[1] + (i - 1) h, {i, 2, n - 1}]

```

Differenssiyhtälö:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + k^2 y_i = 0,$$

josta

$$y_{i\pm 1} = (2 - h^2 k^2) y_i - y_{i\mp 1}$$

Ratkaisu yhdelle k:n arvolle, reunaehdolla $y'(L) = 1$

```

y[1] = 0.0; dy0 = 1.0; y[2] = y[1] + dy0 h;
y[n] = 0.0; dyL = 1.0; y[n - 1] = y[n] - dyL h;

k = 7.0;

```

Funktion arvojen erotus välin keskipisteessä, $l \equiv \frac{n+1}{2}$, on

$$\begin{aligned} y_0(x_l) - y_\infty(x_l) &= (2 - h^2 k^2) y_{l-1} - y_{l-2} - (2 - h^2 k^2) y_{l+1} + y_{l+2} \\ &= (2 - h^2 k^2) (y_{l-1} - y_{l+1}) - (y_{l-2} - y_{l+2}) \end{aligned}$$

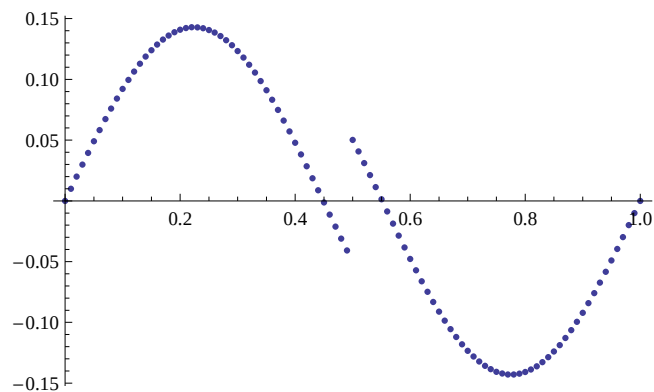
$$l = \frac{n+1}{2};$$

```

Do[
  y[i] = (2 - h^2 k^2) y[i - 1] - y[i - 2];
  y[n - i + 1] = (2 - h^2 k^2) y[n - i + 2] - y[n - i + 3];,
  {i, 3,  $\frac{n-1}{2} + 1$ }]
(*funktion arvojen erotus keskipisteessä*)
(2 - h^2 k^2) (y[l - 1] - y[l + 1]) - (y[l - 2] - y[l + 2])
-0.100477

```

```
ListPlot[Table[{x[i], y[i]}, {i, 1, n}]]
```



Kerätään käskyt funktioiksi. Näissä käytetään koko ajan samaa resoluutiota ja samoja reunaehtoja.

```

Δd[k_] := Module[{ },
  Do[
    y[i] = (2 - h2 k2) y[i - 1] - y[i - 2];
    y[n - i + 1] = (2 - h2 k2) y[n - i + 2] - y[n - i + 3];,
    {i, 3,  $\frac{n-1}{2} + 1$ }] ;
    (2 - h2 k2) (y[l - 1] - y[l + 1]) - (y[l - 2] - y[l + 2])
  ];

plotd[k_] := Module[{ },
  Do[
    y[i] = (2 - h2 k2) y[i - 1] - y[i - 2];
    y[n - i + 1] = (2 - h2 k2) y[n - i + 2] - y[n - i + 3];,
    {i, 3,  $\frac{n-1}{2} + 1$ }] ;
  ListPlot[Table[{x[i], y[i]}, {i, n}], Joined -> True]
]

Δd[12.0]
Δd[15.0]
-0.0460749
0.125744

```

Välinpuolitusmenetelmä:

```
plotd[bisection[Δd, 12.0, 15.0]]
```

