

Harjoitustyö 1

Avainsanat

- Interpolaatio
- Funktion sovitus dataan
- Integrointi

Johdanto

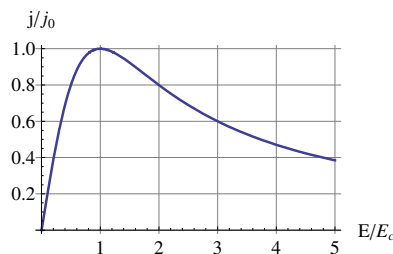
Huom. fysikaalista puolta ei tarvitse ymmärtää (voit tietenkin kysyä, jos asia kiinnostaa). Harjoitustyön kannalta olennaista asiaa ovat vain esitetyt yhtälöt.

Superhilat ovat nanomittakaavan elektronisia komponentteja, joita voidaan käyttää vahvistamaan terahertsitaajuuksista sähkömagneettista säteilyä. Tämä johtuu siitä, että kasvatettaessa superhilan päiden välistä jännitettä, tietyn kriittisen jännitteen jälkeen superhilan läpi kulkeva virta alkaa pienentyä. Säteilyn vahvistaminen on mahdollista virta–jännite-käyrän laskevassa osassa. Seuraavassa puhutaan virran asemesta *virtatiheydestä* ja jännitteen asemesta *sähkökentästä*. Nämä suureet ovat karkeasti ottaen suoraan verrannollisia toisiinsa.

Teoreettisesti voidaan johtaa seuraava kaava virtatiheydelle sähkökentän funktiona:

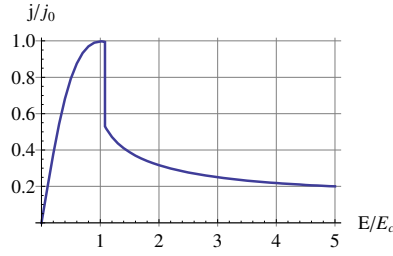
$$j(E) = 2j_0 \frac{E/E_c}{1 + (E/E_c)^2}. \quad (1)$$

Tässä E_c on kriittinen sähkökentän arvo ja j_0 on virran huippuarvo, ts. $j_0 = j(E_c)$ (ks. kuva).



Yhtälö (1) pätee vain, jos elektronijakauma superhilassa on homogeeninen. Kun $E < E_c$, superhila on homogeeninen; kun $E \gtrsim E_c$, se jakautuu karkeasti ottaen kahteen alueeseen, joista toisessa on voimakas sähkökenttä ja toisessa hyvin heikko. Tämä jakautuminen vähentää merkittävästi virran voimakkuutta

sähkökentän arvoilla $E > E_c$.



Säteilyn vahvistusta kuvaa *absorptio* A , joka määritellään seuraavassa. Oletetaan, että superhilassa vaikuttaa staattinen sähkökenttä E_0 . Sähkömagneettinen säteily vuorovaikuttaa aineen johde-elektronien kanssa ja liikuttaa niitä teholla $P = envE$, missä e on elektronin varaus, n elektronien lukumäärä tilavuusyksikössä, v on elektronin nopeus ja E säteilyyn liittyvä muuttuva sähkökenttä. Virtatiheys on $j = env$, ja olkoon $E_{ac}(t) = E_1 \cos \omega t$ säteilykenttä, missä E_1 on säteilyn amplitudi ja ω kulmataajuus. Tällöin superhilan johde-elektronien kokema kokonaissähkökenttä on

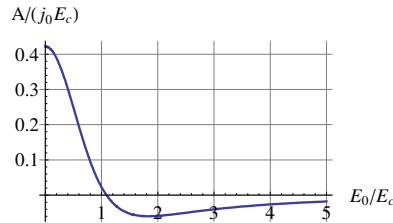
$$E(t) = E_0 + E_1 \cos \omega t, \quad (2)$$

jolloin *keskimääräinen tehonsiirto säteilykentän ja johde-elektronien välillä* on

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T j(E(t)) E_1 \cos \omega t dt, \quad (3)$$

missä j riippuu siis sekä staattisesta että muuttuvasta sähkökentästä. T on $E(t)$:n jakson pituus, ts. $T = 2\pi/\omega$.

Jos $E_0 > E_c$, absorptio A voi olla negatiivinen, mikä tarkoittaa sitä, että energiaa siirtyy johde-elektroneilta säteilykentälle ja se vahvistuu.



Tehtävänanto

Tiedostoon `ht1_data.txt` on taulukoitu superhilan läpi kulkevan virran tiheys j sähkökentän E funktiona. Virtatiheys on yksiköissä A/m^2 ja sähkökenttä yksiköissä V/m .

1. Piirrä datapisteet (E_i, j_i) koordinaatistoon. Huomaat, että $j(E)$ -käyrässä on epäjatkuvuuskohta, joka on likimain kriittisen sähkökentän kohdalla. Arvioi kuvaajasta silmämääräisesti E_c :n arvo.

2. Kun $E < E_c$, virtatiheys noudattaa likimain kaavaa (1). Ota tarkasteluun pisteet, joille $E_i < E_c$, ja sovita näihin pisteisiin muotoa

$$\frac{E/E_c}{1 + (E/E_c)^2}$$

oleva funktio pienimmän neliösumman menetelmällä, ja määritä j_0 :n arvo tästä sovituksesta. Piirrä sovitusfunktio samaan kuvaan datapisteiden kanssa. Vertaa sovituksen antamaa j_0 :n arvoa datapisteiden suurimpaan virtatiheyden arvoon.

Lähellä sähkökentän arvoa E_c datapisteet ovat tiheämmässä. Tee em. sovitus niin, että jätät lähellä E_c :tä olevia pisteitä yksitellen pois ja laske joka välissä j_0 :n arvo.

3. Laske absorptiota A käyttäen kaavoja (1), (2) ja (3). Kirjoita funktio, joka laskee absorption staattisen sähkökentän E_0 funktiona, kun E_1 ja ω on annettu. Totea, että A ei riipu taajuudesta ω . Piirrä funktion kuvaaja, kun $0 \leq E_0 \leq 5E_c$, ja

a) $E_1 = 0.1E_c$

b) $E_1 = 0.5E_c$

4. Laske absorptiota A käyttäen datapisteitä (E_i, j_i) . Tätä varten sinun on luotava interpoloituva funktio $J(E)$, jolle $J(E_i) = j_i$. Koska datapisteitä on niin paljon, kannattaa interpoloituva funktio määritellä paloittain, $J(E) = q_i(E)$, kun $E_i < E < E_{i+1}$. Funktioina q_i voit käyttää 1. asteen polynomeja.

- a) Laske integraali

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T J(E(t)) E_1 \cos \omega t \, dt$$

Mathematican valmiilla funktiolla `NIntegrate`. Tässä $E(t) = E_0 + E_1 \cos \omega t$. `NIntegrate` saattaa antaa liudan virheilmoituksia, mutta älä välitä niistä, kunhan funktio antaa jonkin tuloksen.

- b) Approksimoi integraalia puolisuunnikassäännöllä: Merk.

$$A_i = J(E(t_i)) E_1 \cos \omega t_i,$$

jolloin

$$A \approx \frac{h}{T} \left(\frac{A_1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} A_i + \frac{A_n}{2} \right)$$

missä $h = t_{i+1} - t_i$, $t_1 = 0$, $t_n = T$. Kokeile eri n :n arvoja ja valitse tarpeeksi suuri.

Piirrä kummassakin kohdassa kuvaaja absorptiosta staattisen sähkökentän funktiona. Voit esim. taulukoida absorption arvoja kymmenisen kapapaltoa ja käyttää `ListPlot`-funktioita. Kuvaajan piirtäminen `Plot`-funktioilla voi kestää kauan.

Ohjeita toteutukseen

- Tee kaikki laskut Mathematicalla ja kommentoi tekemisiäsi. Pitemmät kommentit kannattaa kirjoittaa tekstityyliseen soluun (valitse solu ja paina Alt-7).
- Älä käytä muotoa %n olevia komentoja edellisiin tuloksiin viitataksesi.
- Mathematica-notebook, johon teet laskut, toimii myös työselostuksena. Selostus palautetaan sähköpostitse osoitteeseen

`jmattas@mail.student.oulu.fi`

Huom. laskut täytyy voida ajaa siinä järjestyksessä kuin ne on notebookiin kirjoitettu.

- Kirjoita notebookin alkuun nimesi, harjoitustyön numero ja palautuspäivä.
- Jäsentele selostuksesi otsikkotyyliisillä soluilla (ks. harjoitus 1:n ratkaisut).