

Harjoitus 9

1. Harmoninen oskillaattori

Pakotetun, vaimennetun harmonisen oskillaattorin liikeyhtälö on

$$x''(t) + \gamma x'(t) + \omega^2 x(t) = f(t) \quad (1)$$

Olkoon $f(t) = f_0 \cos \omega_d t$. Ratkaise yhtälö (1). Piirrä ratkaisun kuvaaja ja `ParametricPlot`-funktioilla kuvaaja $(x(t), x'(t))$ seuraavissa tilanteissa: (tulkitse tulokset)

- a) $x(0) = 1, x'(0) = 0, f_0 = 0, \gamma = 0$ (yksinkertainen harmoninen värähtelijä)
- b) $x(0) = 1, x'(0) = 1, f_0 = 0, \gamma = 0.1$
- c) $x(0) = 1, x'(0) = 0, f_0 = 1, \omega = 1, \omega_d = 1, \gamma = 0.1$
- d) $x(0) = 1, x'(0) = 0, f_0 = 1, \omega = 1, \omega_d = 0.9, \gamma = 0.1$
- e) $x(0) = 0, x'(0) = 0, f_0 = 1, \omega = 1, \omega_d = 1.5, \gamma = 0.9$

Lisäksi c), d) ja e)- kohdissa laske integraali

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x'(t) f(t) dt \quad (2)$$

joka kuvaa keskimääräistä tehonsiirtoa ajavalta voimalta oskillaattorille. Tässä t_0 on jokin ajanhetki (kokeile eri t_0 :n arvoja) ja $T = 2\pi/\omega_d$.

2. Peto-Saalis-malli / Lotka-Volterran-malli

Kaksi eliöpopulaatiota kilpailee saman ympäristön rajoitetuista resursseista. Populaatioiden kehitystä kuvaa differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \epsilon_1 N_1(t) - \beta_1 N_1^2(t) - \gamma_1 N_1(t) N_2(t) \\ \frac{dN_2}{dt} &= \epsilon_2 N_2(t) - \beta_2 N_2^2(t) - \gamma_2 N_2(t) N_1(t) \end{aligned}$$

Yhtälöissä esiintyvät parametrit voidaan tulkita seuraavasti:

- ϵ_i – kuinka nopeasti populaatio N_i kasvaisi, jos ympäristö ei rajoittaisi kasvua
- β_i – kuinka paljon ympäristön resurssien rajallisuus rajoittaa populaation N_i kasvua

- γ_i – kuinka paljon toisen populaation läsnäolo rajoittaa populaation N_i kasvua

Ratkaise yhtälöryhmä funktiolla `NDSolve` ja piirrä ratkaisun kuva seuraavissa tilanteissa:

- $\beta_i = \gamma_i = 0, \epsilon_1 = 0.3, \epsilon_2 = 0.4, N_i(0) = 1.$
- $\beta_i = 0.2, \gamma_i = 0, \epsilon_1 = 0.3, \epsilon_2 = 0.4, N_i(0) = 1.$
- $\beta_i = 0.2, \gamma_i = 0.1, \epsilon_1 = 0.3, \epsilon_2 = 0.4, N_i(0) = 1.$
- $\beta_i = 0, \gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = -0.15, \epsilon_1 = 0.3, \epsilon_2 = -0.4, N_i(0) = 1.$

Muuttele joka kohdassa hieman parametrien arvoja ja tulkitse tuloksia.