

Harjoitus 11 -- Ratkaisut

1

Tässä harjoituksessa ei käsitellä kahden pisteen reuna-arvoproblemaa. Sitä käsitellään 3. harjoitustyössä ja harjoitus 11:ssä. Tässä harjoituksessa lähinnä esitellään differentiaaliyhtälöiden ratkaisumahdollisuuksia Mathematicalla.

Maan säde, massa ja gravitaatiovakio löytyvät paketista PhysicalConstants. Supistetaan yksiköt pois.

```
<< PhysicalConstants`
```

```
R = EarthRadius / Meter
```

```
M = EarthMass / Kilogram
```

```
G = GravitationalConstant / Meter2 / Newton * Kilogram2
```

```
6 378 140
```

```
5.9742 × 1024
```

```
6.673 × 10-11
```

Differentiaaliyhtälöt paikkavektorin $\mathbf{r}$ komponenteille:

$$eqx = x''[t] == -\frac{GM}{(x[t]^2 + y[t]^2)^{3/2}} x[t] - \frac{\gamma}{m} \sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2} x'[t];$$

$$eqy = y''[t] == -\frac{GM}{(x[t]^2 + y[t]^2)^{3/2}} y[t] - \frac{\gamma}{m} \sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2} y'[t];$$

■ a) ei kitkavoimaa

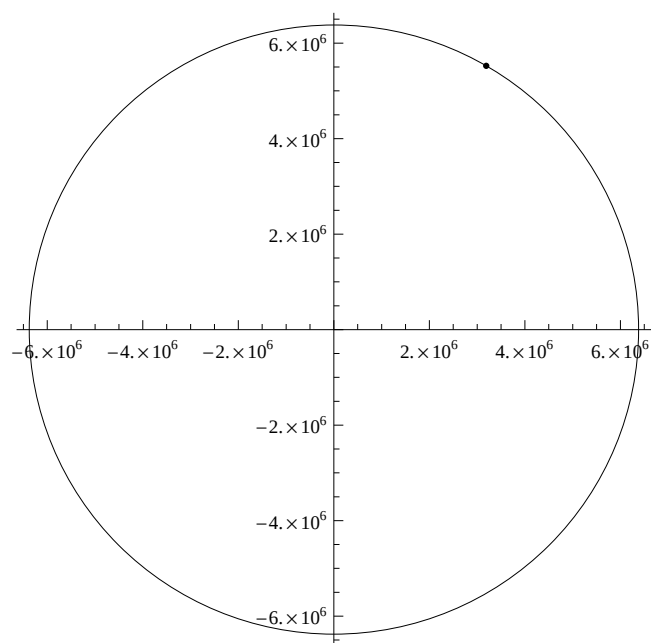
Ilmaistaan lähtöpaikka leveysasteen avulla:

```
 $\theta = 60.0 \text{ Degree};$  (*lähtöpaikan leveysaste*)
```

```
 $\mathbf{r0} = \mathbf{R} \{\text{Cos}[\theta], \text{Sin}[\theta]\};$ 
```

Lähtöpaikka voidaan piirtää ympyrän kehälle:

```
Show[Graphics[Circle[{0, 0}, R]], Graphics[Point[r0]], Axes -> True]
```

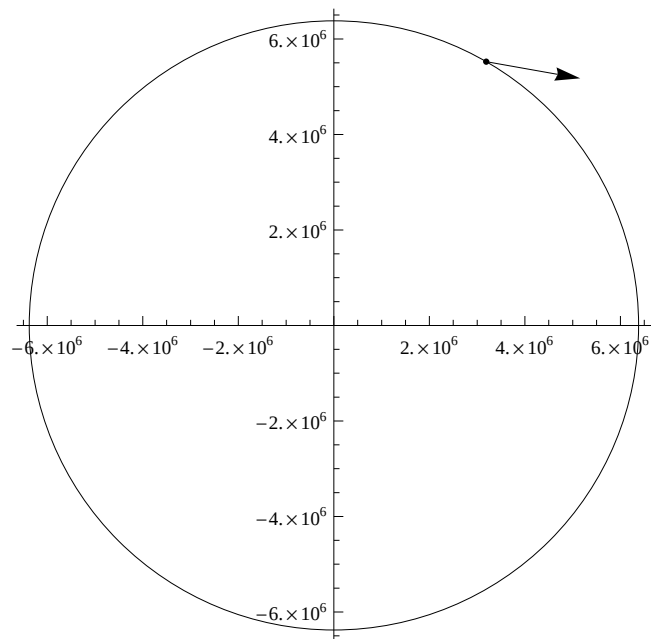


Olkoon α lähtönopeuden ja Maan pinnan välinen kulma lähtöpaikassa. Tällöin nopeuden suuntakulma sellaisessa koordinaatistossa, jossa y-akseli osoittaa Maan akselin suuntaisesti, on $\phi = \pi/2 - (\theta + \alpha)$ (osoita!)

```
 $\alpha = 20.0 \text{ Degree};$   
 $V = 10\,000; (*\text{l\ddot{a}ht\ddot{o}nopeus metrein\ddot{a} sekunnissa*})$   
 $\phi = (\theta + \alpha) - \pi / 2;$   
 $v0 = V \{ \text{Cos}[\phi], \text{Sin}[\phi] \};$ 
```

Vektoria v_0 on hieman suurenneltava, jotta se näkyisi Maan mittakaavassa.

```
g0 = Show[Graphics[Circle[{0, 0}, R]],  
Graphics[Point[r0]], Graphics[Arrow[{r0, r0 + 200 v0}]], Axes -> True]
```

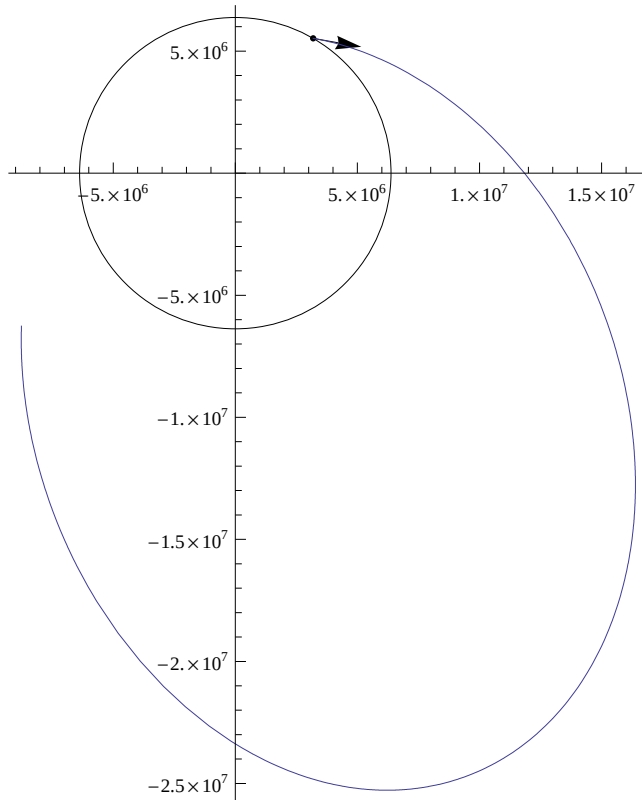


Lähdetään ratkaisemaan yhtälöitä. Kannattaa aloittaa pienestä T:n arvosta (jos esim. kappaleen lentorata vie Maan keskipisteseen, NDSolve kaatuu).

```

T = 18000; (*lentoaika sekunteina*)
val = {m → 10000, γ → 0.0};
sol = Flatten[NDSolve[{eqx, eqy, x[0] == r0[[1]], y[0] == r0[[2]],
  x'[0] == v0[[1]], y'[0] == v0[[2]]} /. val, {x[t], y[t]}, {t, 0, T}]];
{X[t_], Y[t_]} = {x[t], y[t]} /. sol;
Show[g0, ParametricPlot[{X[t], Y[t]}, {t, 0, T}, AspectRatio -> 1]]

```



Ilman vastusvoimia kappaleen lentorata on ellipsi, jonka toinen polttopiste on Maan keskipisteessä. Jotta kappale palaisi lähtöpisteeseensä, on lähtönopeuden oltava Maan pinnan suuntainen (muuten kappale törmäisi Maan pintaan jossain muualla kuin lähtöpisteessä -- laskennallisesti kappale voi tietenkin matkata alueessa jossa etäisyys Maan keskipisteestä on $< R$).

Kirjoitetaan ratkaisuprosessi omaksi funktiokseen, jonka argumenit ovat

θ	lähtöpaikan leveysaste
α	lähtönopeuden suuntakulma
V	lähtönopeus
m	kappaleen massa
γ	kitkakerroin
T	lentoaika

```

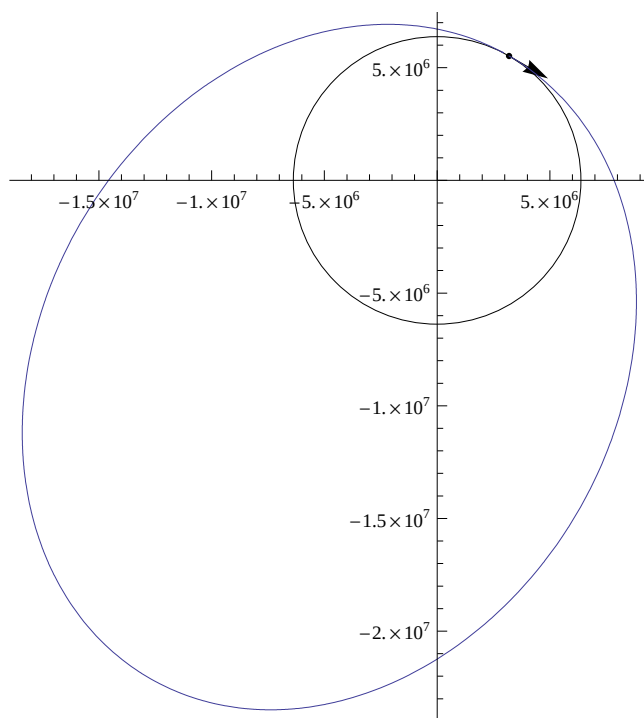
raketti[θ_, α_, V_, m0_, γ0_, T_] :=
Module[{φ, r0, v0, X, Y, eqx, eqy, g0},
  φ = θ + α - π / 2;
  r0 = R {Cos[θ], Sin[θ]};
  v0 = V {Cos[φ], Sin[φ]};
  g0 = Show[Graphics[Circle[{0, 0}, R]],
    Graphics[Point[r0]], Graphics[Arrow[{r0, r0 + 200 v0}]], Axes → True];

  eqx = x''[t] == -  $\frac{GM}{(x[t]^2 + y[t]^2)^{3/2}}$  x[t] -  $\frac{\gamma}{m} \sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2} x'[t]$ ;
  eqy = y''[t] == -  $\frac{GM}{(x[t]^2 + y[t]^2)^{3/2}}$  y[t] -  $\frac{\gamma}{m} \sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2} y'[t]$ ;

  val = {m → m0, γ → γ0};
  sol = Flatten[NDSolve[{eqx, eqy, x[0] == r0[[1]], y[0] == r0[[2]],
    x'[0] == v0[[1]], y'[0] == v0[[2]]} /. val, {x[t], y[t]}, {t, 0, T}]];
  {X[t_], Y[t_]} = {x[t], y[t]} /. sol;
  Show[g0, ParametricPlot[{X[t], Y[t]}, {t, 0, T}, AspectRatio -> 1]]
];

raketti[60.0 Degree, 0.0 Degree, 10 000, 10 000, 0.0, 20 000]

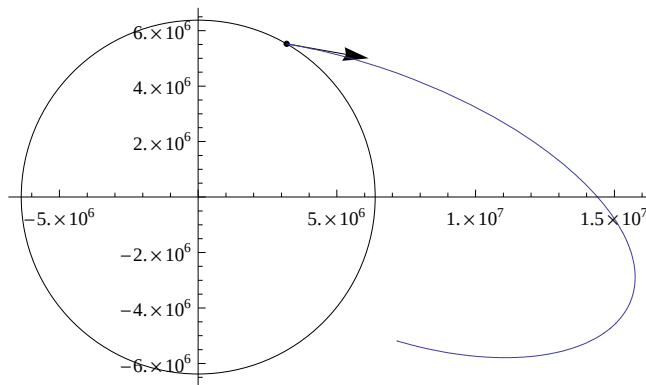
```



■ b) joo kitkavoimaa

Otetaan käyttöön epärealistinen malli kitkavoimalle (kitkakerroin on sama riippumatta etäisyydestä Maan pinnasta).

```
raketti[60.0 Degree, 20.0 Degree, 15 000, 15 000, 0.001, 6500]
```



Raketti ei plaa lähtöpaikalleen millään parametrien arvoilla (kitkavoima kääntää sen kulkusuunnan aina Maan keskipistettä kohti).

■ b-ekstra) parempi kitkavoima

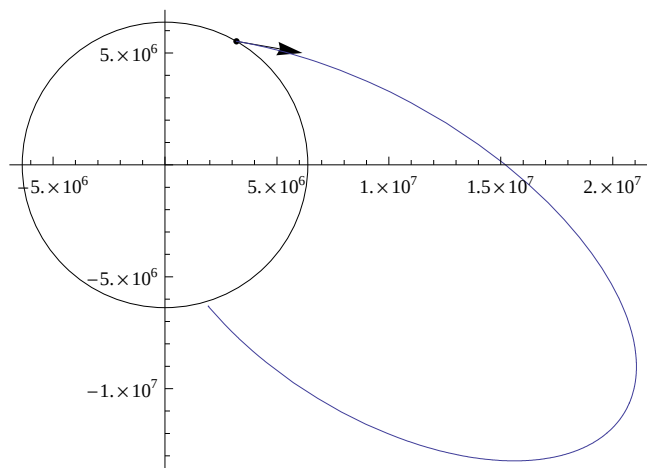
Muutetaan hieman kitkavoiman lauseketta, muodostetaan voima joka heikkenee kun raketti loittonee Maasta. Heikkeneminen voisi olla vaikka muotoa $1/(r(t)/R)$ (täysin hatusta vedetty).

```
raketti2[θ_, α_, V_, m0_, γ0_, T_] :=
Module[{φ, r0, v0, X, Y, eqx, eqy, g0},
  φ = θ + α - π / 2;
  r0 = R {Cos[θ], Sin[θ]};
  v0 = V {Cos[φ], Sin[φ]};
  g0 = Show[Graphics[Circle[{0, 0}, R]],
    Graphics[Point[r0]], Graphics[Arrow[{r0, r0 + 200 v0}]], Axes -> True];

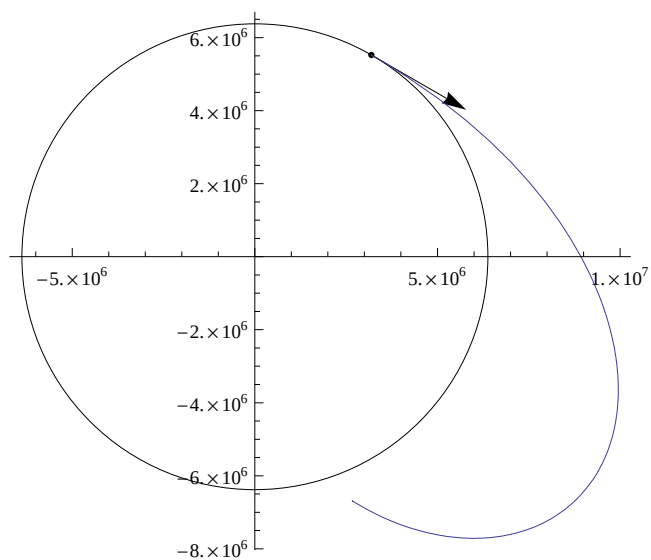
  eqx = x''[t] == -  $\frac{GM}{(x[t]^2 + y[t]^2)^{3/2}} x[t] - \frac{\gamma}{m} \frac{\sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2}}{\sqrt{x[t]^2 + y[t]^2} / R} x'[t];$ 
  eqy = y''[t] == -  $\frac{GM}{(x[t]^2 + y[t]^2)^{3/2}} y[t] - \frac{\gamma}{m} \frac{\sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2}}{\sqrt{x[t]^2 + y[t]^2} / R} y'[t];$ 

  val = {m -> m0, γ -> γ0};
  sol = Flatten[NDSolve[{eqx, eqy, x[0] == r0[[1]], y[0] == r0[[2]],
    x'[0] == v0[[1]], y'[0] == v0[[2]]} /. val, {x[t], y[t]}, {t, 0, T}]];
  {X[t_], Y[t_]} = {x[t], y[t]} /. sol;
  Show[g0, ParametricPlot[{X[t], Y[t]}, {t, 0, T}, AspectRatio -> 1]]
];
```

raketti2[60.0 Degree, 20.0 Degree, 15 000, 15 000, 0.001, 13 000]



raketti2[60.0 Degree, 0.0 Degree, 15 000, 12 000, 0.001, 4000]



■ b-ekstra2)

Lisäksi voitaisiin lisätä yhtälöihin työntövoima, esim.

$$f(t) = \begin{cases} f_0 v(t), & \text{kun polttoainetta on jäljellä} \\ 0, & \text{kun polttoaine on loppu} \end{cases}$$

Nyt ratkaisussa olisi määrättävä polttoaineen määrä alussa m_t ja polttoaineen palonopeus c (kg/s). Kappaleen massa olisi myös ajan funktio:

$$m(t) = \begin{cases} m_0 - c t, & \text{kun } t < m_t / c \\ m_0 - m_t, & \text{kun } t \geq m_t / c \end{cases}$$

m_t / c on siis se ajanhetki, kun polttoaine loppuu.

2

Muodostetaan differenssiyhtälöt. Ilman kitkatermiä niistä saadaan eksplisiittisesti ratkaistua x_{i+1} . Kitkatermin kanssa on käytännössä turvaututtava numeeriseen yhtälön ratkaisuun, esim. FindRoot-funktioon.

$$\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{h^2} = GM \frac{x_i}{(x_i^2+y_i^2)^{3/2}} + \frac{\gamma}{m} \sqrt{\left(\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2h}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right)^2} \frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2h}$$

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} = GM \frac{y_i}{(x_i^2+y_i^2)^{3/2}} + \frac{\gamma}{m} \sqrt{\left(\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2h}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right)^2} \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$$

Ratkaistaan nämä ensin ilman kitkatermejä. Alkunopeus ja -paikka:

```
θ = 60.0 Degree;
r0 = R {Cos[θ], Sin[θ]};
V = 5000;
α = 20.0 Degree;
v0 = V {Cos[α], Sin[α]};
g0 = Show[Graphics[Circle[{0, 0}, R]],
Graphics[Point[r0]], Graphics[Arrow[{r0, r0 + 200 v0}], Axes → True];
```

Ajanhetket, joilla ratkaisua etsitään:

```
h = 2; t[1] = 0.0; T = 2000;
i = 1;
While[t[i] ≤ T, i++; t[i] = t[i - 1] + h];
n = i;
```

Alkuehdot ratkaistaville funktioille:

```
Clear[x, y]
x[1] = r0[[1]]; y[1] = r0[[2]];
x[2] = x[1] + v0[[1]] h;
y[2] = y[1] + v0[[2]] h;
```

Ratkaisuprosessi voidaan keskeyttää, jos kappale päättyy Maan sisään.

```
Do[
{x[i + 1], y[i + 1]} =
{x[i + 1], y[i + 1]} /.
FindRoot[
{
  {
    x[i + 1] - 2 x[i] + x[i - 1]
    +  $\frac{GM x[i]}{(x[i]^2 + y[i]^2)^{3/2}}$  == 0,
    y[i + 1] - 2 y[i] + y[i - 1]
    +  $\frac{GM y[i]}{(x[i]^2 + y[i]^2)^{3/2}}$  == 0},
  {x[i + 1], x[i]}, {y[i + 1], y[i]}
};
If[Norm[{x[i], y[i]}] < R, Break[]],
{i, 2, n - 1}] // Quiet;
```

```
Show[g0, ListPlot[Table[{x[i], y[i]}, {i, 1, n}]]]
```

