

Harjoitustyö 1

Tämä harjoitustyö jakautuu kahteen osaan. Ensimmäisessä tarkastellaan 1-ulotteisia törmäyksiä, joissa törmäävät hiukkaset liikkuvat samalla suoralla ennen ja jälkeen törmäyksen. Toinen osa käsittelee 2-ulotteisia törmäyksiä. Aluksi hieman johdantoa.

Kaksi kappaletta (massat m_1 ja m_2) liikkuvat nopeuksilla $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ ja törmäävät toisiinsa. Kappaleet kimpoavat toisistaan. Törmäyksen jälkeen niiden nopeudet ovat $\mathbf{v}'_1$ ja $\mathbf{v}'_2$. Liikemäärä $p = mv$ säilyy törmäyksessä, joten

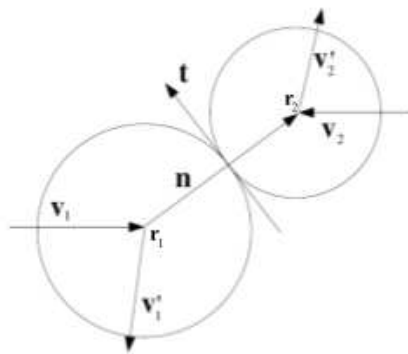
$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2 \quad (1)$$

Jos törmäystä käsitellään täysin kimmoisana, kappaleiden kokonaisliike-energia säilyy

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (2)$$

missä v_i on kappaleen vauhti (eli nopeusvektorin $\mathbf{v}_i$ pituus)

Jos törmäys ei tapahdu suoraan vastakkain, kappaleet siroavat johonkin suuntaan, joka riippuu muun muassa kappaleiden muodosta ja siitä miten ne törmäävät toisiinsa. Tässä harjoitustyössä oletamme, että kappaleet ovat äärimmäisen kovia täydellisiä palloja. Oletuksista seuraa, että voimme rajoittua tarkastelemaan tilannetta tasossa (2-D). Tätä tasoa kutsutaan *törmäystasoksi*.



Jos vielä oletamme, että törmäys pallojen välillä tapahtuu niin, etteivät ne hieroudu toisiaan vastaan, voidaan muodostaa taso pallojen ratojen avulla. Tämä taso on kohtisuorassa törmäystasoa vastaan. Näiden tasojen leikkauksena saadaan vektorin $\mathbf{t}$ suuntainen suora.

Kaksi-ulotteisessa tapauksessa alkuperäiset nopeudet jaetaan *normaali-* and *tangentiaalikomponentteihin* (eli vektorien $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{t}$ suuntaisiin komponentteihin). Tangentiaalikomponentti säilyy vakiona törmäyksessä ja normaalikomponentti muuttuu 1-ulotteisen tapauksen mukaan.

Komponentit voidaan laskea pistetulojen avulla:

$$v_{i,n} = \mathbf{v}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3)$$

ja

$$v_{i,t} = \mathbf{v}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (4)$$

missä $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/n$ ja $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{t}/t$ ovat yksikkövektoreita.

Normaalin suuntainen vektori $\mathbf{n}$ voidaan muodostaa pallojen keskipisteiden paikkavektorien erotuksena törmäyshetkellä $\mathbf{n} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ja tangentiaalivektori voidaan sitten laskea operoimalla normaalivektoriin 90 asteen kierto. Tämä onnistuu seuraavasti

$$\mathbf{t} = R\mathbf{n}, \quad (5)$$

missä

$$R = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

on kiertomatriisi.

Kun tangentiaali ja normaalikomponentit tunnetaan saadaan "alkuperäiset" x ja y komponentit laskemalla projektiot koordinaattiakseleille. Tämän saa aikaan esittämällä yksikkövektorit $\hat{\mathbf{x}}$ ja $\hat{\mathbf{y}}$ yksikkövektoreiden $\hat{\mathbf{n}}$ ja $\hat{\mathbf{t}}$ avulla.

On toki muitakin tapoja suorittaa koordinaattimuunnokset kuin yllä esitetty, mutta jos käytät jotain muuta metodologia sinun täytyy selostaa se yksityiskohtaisesti raportissa.

1. Alkulämmittelyksi tarkastellaan törmäystä yhdessä ulottuvuudessa (x -akselin suunnassa). Ratkaise nopeudet $\mathbf{v}'_1$ ja $\mathbf{v}'_2$ yhtälöistä (1) ja (2). Tässä tapauksessa ei vektori luonteesta tarvitse välittää, koska tarkastellaan vain x -suuntaista komponenttia ennen ja jälkeen törmäyksen.

Seuraavaksi hyökkää seuraavien tehtävien kimppuun juuri muodostamiesi funktioiden avulla:

- a) Kappale A (massa 150 g) liikkuu nopeudella 10,2 m/s ja törmää levossa olevaan Kappaleeseen B (mass 2,23 kg). Oletetaan törmäys täysin kimmoisaksi. Määritä molempien kappaleiden nopeudet törmäyksen jälkeen.
- b) Tarkastellaan samoja kappaleita kuin a)-kohdassa. Mikä täytyy olla kappaleen A alkunopeus jotta sen loppunopeus olisi 4,5 m/s pois päin B :stä. (Kappale B jälleen aluksi levossa.)
- c) Jälleen tarkastellaan samoja kappaleita. Nyt B ja A liikkuvat aluksi samaan suuntaan. A liikkuu samalla nopeudella kuin a)-kohdassa ja B nopeudella $\mathbf{v}_2$. Mikä täytyy nopeuden v_2 olla, jotta kappale A jää törmäyksen jälkeen lepoon.

Ja sitten hyökittää 2-ulotteisen tapauksen kimppuun.

Olko pallojen säteet R_1 ja R_2 . Voit olettaa, että alkunopeudet ovat yhdensuuntaiset. Pallojen liikettä ja sijaintia toisiinsa nähden voidaan kuvata niiden välisellä kohtisuoralla etäisyydellä. Tämä määritetään nopeusien

($\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$) suuntaisten suorien välisellä etäisyydellä d . Huomaa, että d voi saada sekä positiivisia, että negatiivisia arvoja. Heti alkuun on hyvä todeta, että jos $|d| \geq R_1 + R_2$, ei törmäystä tapahdu ja tämä ehto antaa meille d :n määrittelyalueen.

Normaalivektori on

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{x}}\sqrt{(R_1 + R_2)^2 - d^2} + \hat{\mathbf{y}}d \quad (7)$$

ja tangentiaalivektori voidaan laskea (5) avulla. Laske alkunopeuksien normaali- ja tangentiaalikomponentit (3) ja (4) avulla. Tangentiaalikomponentti säilyy törmäyksessä ja normaalikomponentille pätee tehtävässä 1 määritelty muoto.

2. a) Tarkastellaan kahta kappaletta, massat 1.50 kg and 1.25 kg ja säteet 15 cm ja 13 cm. Kappaleet törmäävät nopeuksilla $v_1 = 1.5$ m/s ja $v_2 = 1.25$ m/s toisiinsa parametrin d ollessa 10 cm. Laske kappaleiden loppunopeudet.
- b) Jälleen kaksi kappaletta massat 0.01 kg ja 10.0 kg ja säteet 0.1 cm ja 20.0 cm. Kappaleista suurempi on alussa levossa ja pienempi törmää siihen nopeudella 1.00 m/s. Määrittele funktio, joka antaa kulman pienemmän kappaleen alku ja loppunopeuden välillä. Piirrä kulman kuvaaja parametrin d funktiona. *Huom:* vektorien välinen kulma esiintyi toisessa harjoituksessa (tarvitaan pistetuloa).
- c) Kaksi identtistä hiukkasta liikkuvat alkunopeuksilla 1,00 m/s. Tee samat laskut kuin b)- kohdassa. Lisäksi piirrä kuvaaja kappaleiden loppunopeuksien välisestä kulmasta, jpkä jälleen riippuu d :stä.

Pieni ohjeistus selostukseen

Tee kaikki yllä olevat tehtävät Mathematicalla. Mathematica notebook on samalla työselostuksesi joten:

- Notebookin alkuun: nimi, harkkatyön numero ja palautuspäivämäärä.
- Jaottele ja selkiytä selostusta käyttämällä otsikoita, alaotsikoita ja tekstityyppejä soluja.
- Kerro mitä teet (omin sanoin).
- Vältä %n tyyppistä viittaustapaa (ts. määrittele jakäytä symboleita)
- Kirjoita laskut niin, että ne voidaan ajaa tai uudelleen-evaluoida notebookin alusta loppuun ilman virheilmoituksia.

Palauta harjoitustyön notebook sähköpostilla: klooo@paju.oulu.fi