1. Määrää hermiittisille ja lineaarisesti vapaille $N \times N$- matriiseille α_k ja β alin dimensio, jossa relaatiot

$$\begin{aligned} \{\alpha_k, \alpha_l\} &= 2\,\delta_{kl} \\ \{\alpha_k, \beta\} &= 0 \\ \beta^2 &= 1 \\ \alpha_k^2 &= 1 \end{aligned}$$

   voivat olla voimassa.

2. Osoita γ-matriisien antikommutaatiosääntöjen perusteella oikeiksi seuraavat γ-matriiseja koskevat säännöt.

   a)
$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$$

   b)
$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\,\not{a}$$

   c)
$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4\, a \cdot b$$

   d)
$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\, \not{c} \not{b} \not{a}$$

3. Osoita γ- matriisien antikommutaatiosäätöjen nojalla seuraavat ominaisuudet:

   a)
$$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\lambda\, \gamma^\mu \cdots \gamma^\epsilon\right) = 0\,,$$

   missä γ-matriiseja on pariton määrä

   b)
$$\mathrm{Tr}\,(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b$$

   c)
$$\mathrm{Tr}\,(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4\,((a \cdot b)\ (c \cdot d) - (a \cdot c)\ (b \cdot d) + (a \cdot d)\ (b \cdot c)\,)$$

   d)
$$\mathrm{Tr}\gamma_5 = 0$$

   e)
$$\mathrm{Tr}\,(\gamma_5 \not{a}\not{b}) = 0$$

   f)
$$\mathrm{Tr}\,(\gamma_5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4\, i\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} a^\mu b^\nu b^\lambda d^\sigma\,,$$

   missä $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = +1$ (vast. -1), kun $(\mu, \nu, \lambda, \sigma)$ on parillinen (vast. pariton) (1,2,3,4):n permutaatio (ja $= 0$ jos kaksi indeksiä ovat samat).