1. Kirjoita yksinkertaisen heilurin (massa m, langan pituus l, värähdys yhdessä tasossa) Lagrangen funktio. Määrää Lagrangen funktio pienten värähtelyjen aproksimaatiossa ja laske värähtelytaajuus.

2. Tutkitaan pieniin värähtelyihin liittyvää ominaisarvo ongelmaa. Osoita todeksi luennolla esitetyt väittämät:
   a) Ominaisvektorit ovat ortonormaalisia matriisin A mielessä.
   b) Ominaisarvot ω^2 ovat reaalisia.

3. Tutkitaan yksinkertaista heiluria tapauksessa, jossa lanka onkin venyvä (jousivakio k, langan pituus venyttämättömänä l_0). Muodosta pienten värähtelyjen Lagrangen funktio ja määrää ominaistaajuudet.

4. Yhdestä pisteestä kiinnitetty ohut vanne (säde R, massa m) oskilloi omassa tasossaan. Liitetään vanteeseen massa piste M, joka liikkuu ilman kitkaa vannetta pitkin. Systeemi on vakio gravitaatio kentässä $\mathbf{g}$. Käsitellään vain pieniä värähtelyjä.
   a) Osoita, että normaali-moodien taajuudet ovat

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2g}{R}\right)^{1/2}, \omega_2 = \left(\frac{2g}{R}\right)^{1/2}$$

   b) Etsi normaali-moodien ominaisfunktiot. Piirrä liikkeestä kuvaaja.

5. Osoita, että pienten värähtelyjen tapauksessa siirtyminen normaalikoordinaatteihin johtaa luennolla esitettyyn Lagrangen funktion muotoon.