

Homogeeniset puolijohteet

Olemme jakaneet kiteet kahteen ryhmään:

metallit ainakin yksi energiavyö on osittain täytetty

eristeet energiavyöt ovat joko tyhjiä tai täysiä.

Eristeitä karakterisoi nollasta poikkeava energiarako E_g , so. alimman miehittämättömän tilan ja korkeimman miehitetyn tilan energioiden erotus. Energia-aukosta johtuen eristeissä

- nollalämpötilassa kaikki elektronit ovat täysillä vöillä muiden vöiden ollessa tyhjiä,
- äärellisessä lämpötilassa T tyhjiille vöille virittyneiden elektronien osuus on suunnilleen $e^{-E_g/2k_B T}$. Huoneen lämpötilassa tämä osuus on n. 10^{-35} kun E_g on 4 eV ja n. 10^{-2} kun E_g on 0.25 eV.

Puolijohteiksi sanotaan yleensä eristeitä, joissa termiset viritykset saavat aikaan huomattavan johtavuuden sulamispistettä alhaisemmissa lämpötiloissa. Puolijohteiden energiarako on niin ollen kertalukua 0.1–2 eV ja vastaavasti resistiivisyydet luokkaa 10^{-3} – $10^9 \Omega \text{ cm}$.

Metallin johtavuus on relaksaatioaikamallin mukaan

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

Tässä ainoa lämpötilasta riippuva suure on relaksaatioaika τ , joka ilmeisestikin lyhenee lämpötilan noustessa. Metallin johtavuus siis pienenee kun lämpötila kasvaa. Puolijohteilla sen sijaan varausten kuljettajien tiheys n riippuu eksponentiaalisesti suureesta $1/T$ eli johtavuus kasvaa voimakkaasti lämpötilan kasvaessa. Itseasiassa energiarakokin muuttuu lämpötilan funktiona. Puolijohteissa virrankuljetukseen osallistuvat

- täysiltä vöiltä *johtavuusvöille* viritetyt elektronit ja
- viritettyjen elektronien *valenssivöille* jälkeensä jättämät aukot.

Koska ainoastaan pieni murto-osa ($< 10^{-2}$) elektroneista virittyy energia-aukon yli, asettuvat elektronit lähelle johtavuusvyön minimiä ja aukot lähelle valenssivyön maksimia. Voimme siis käyttää efektiivisen massan approksimaatioita

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_c + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{\mu\nu} k_\mu (\mathbf{M}^{-1})_{\mu\nu} k_\nu \quad (\text{elektronit})$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_v - \frac{\hbar^2}{2} \sum_{\mu\nu} k_\mu (\mathbf{M}^{-1})_{\mu\nu} k_\nu \quad (\text{aukot})$$

virrankuljettajien vyöenergioille $\mathcal{E}(\mathbf{k})$. Näissä lausekkeissa $\mathcal{E}_c$ on johtavuusvyön pohjan ja $\mathcal{E}_v$ valenssivyön huipun energia.

Koska tensori $\mathbf{M}^{-1}$ on symmetrinen, voimme aina löytää ortogonaalisen koordinaatiston (k_1, k_2, k_3) , jossa

massatermi on diagonaalinen, ts. jossa

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_c + \hbar^2 \left(\frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_2^2}{2m_2} + \frac{k_3^2}{2m_3} \right) \quad (\text{elektronit})$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_v - \hbar^2 \left(\frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_2^2}{2m_2} + \frac{k_3^2}{2m_3} \right) \quad (\text{aukot}).$$

Esim. Piin johtavuusvyö minimien ympäristöissä on ellipsoidin muotoinen, joten kaksi (diagonaalista) massoista on yhtäsuurta. Nämä ns. transversaaliset massat ovat suuruudeltaan $m_T \approx 0.2m$. Kolmas, ns. longitudaalinen massa on $m_L \approx 1.0m$. Valenssivöillä on kaksi degeneroitunutta maksimia, jotka molemmat ovat pallosymmetrisiä. Näihin liittyvät efektiiviset massat ovat $0.49m$ ja $0.16m$.

Varauksenkuljettajien tiheys

Tärkein puolijohteen ominaisuus tietyssä lämpötilassa on varauksenkuljettajien tiheys eli

- elektronien lukumäärä tilavuusyksikköä kohti johtavuusvyöllä, n_c ja
- aukkojen lukumäärä tilavuusyksikköä kohti valenssivyöllä, p_v .

Epäpuhtaudet

- vaikuttavat huomattavasti varauksenkuljettajien tiheyteen, ts. suureisiin $n_c(T)$ ja $p_v(T)$,
- synnyttävät uusia energiatasoja valenssivyön huipun $\mathcal{E}_v$ ja johtavuusvyön pohjan $\mathcal{E}_c$ väliin.

Toisaalta, koska

- epäpuhtaudet eivät muuta juuri lainkaan johtavuus- ja valenssivyön tilatiheyksiä $g_c(\mathcal{E})$ ja $g_v(\mathcal{E})$
- virtaa kuljettavat ainoastaan johtavuusvöiden elektronit ja valenssivöiden aukot,

voimme epäpuhtauksien konsentraatiosta riippumatta kirjoittaa

$$\begin{aligned} n_c(T) &= \int_{\mathcal{E}_c}^{\infty} d\mathcal{E} g_c(\mathcal{E}) \frac{1}{e^{(\mathcal{E}-\mu)/k_B T} - 1} \\ p_v(T) &= \int_{-\infty}^{\mathcal{E}_v} d\mathcal{E} g_v(\mathcal{E}) \left(1 - \frac{1}{e^{(\mathcal{E}-\mu)/k_B T} - 1} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\mathcal{E}_v} d\mathcal{E} g_v(\mathcal{E}) \frac{1}{e^{(\mu-\mathcal{E})/k_B T} - 1}. \end{aligned}$$

Epäpuhtaudet vaikuttavat näihin tiheyksiin kemiallisen potentiaalin μ välityksellä.

Oletetaan, että kemiallinen potentiaali toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c - \mu &\gg k_B T \\ \mu - \mathcal{E}_v &\ll k_B T. \end{aligned}$$

Tällöin johtavuusvyön ($\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_c$) ja valenssivyön ($\mathcal{E} \leq \mathcal{E}_v$) kaikille tiloille on välttämättä voimassa

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{(\mathcal{E}-\mu)/k_B T} + 1} &\approx e^{-(\mathcal{E}-\mu)/k_B T}, \quad \mathcal{E} \geq \mathcal{E}_c \\ \frac{1}{e^{(\mu-\mathcal{E})/k_B T} + 1} &\approx e^{-(\mu-\mathcal{E})/k_B T}, \quad \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_v. \end{aligned}$$

Tiheyslausekkeet voidaan tällöin kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} n_c(T) &= N_c(T) e^{-(\mathcal{E}_c - \mu)/k_B T} \\ p_v(T) &= P_v(T) e^{-(\mu - \mathcal{E}_v)/k_B T}, \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} N_c(T) &= \int_{\mathcal{E}_c}^{\infty} d\mathcal{E} g_c(\mathcal{E}) e^{-(\mathcal{E} - \mathcal{E}_c)/k_B T} \\ P_v(T) &= \int_{-\infty}^{\mathcal{E}_v} d\mathcal{E} g_c(\mathcal{E}) e^{-(\mathcal{E}_v - \mathcal{E})/k_B T} \end{aligned}$$

ovat hitaahkosti vaihtelevia lämpötilan funktioita.

Useimmiten on myös mahdollista löytää funktioille $N_c(T)$ ja $P_v(T)$ eksplisiittinen lauseke, sillä tavallisesti vain lähellä vöiden reunoja olevat tilat ovat merkittäviä, jolloin efektiivisen massan approksimaatiot

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{k}) &= \mathcal{E}_c + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{\mu\nu} k_\mu (\mathbf{M}^{-1})_{\mu\nu} k_\nu \\ \mathcal{E}(\mathbf{k}) &= \mathcal{E}_v - \frac{\hbar^2}{2} \sum_{\mu\nu} k_\mu (\mathbf{M}^{-1})_{\mu\nu} k_\nu \end{aligned}$$

ovat riittävän tarkkoja. Näitä käyttäen tilatiheydet ovat kirjoitettavissa muotoon

$$g_{c,v}(\mathcal{E}) = \sqrt{2|\mathcal{E} - \mathcal{E}_{c,v}|} \frac{m_{c,v}^{2/3}}{\hbar^3 \pi^2},$$

missä $m_{c,v}^3$ on massatensorin $\mathbf{M}$ ominaisarvojen tulo, ts. $\det \mathbf{M}$. Funktioiksi $N_c(T)$ ja $P_v(T)$ saadaan nyt

$$\begin{aligned} N_c(T) &= \frac{1}{4} \left(\frac{2m_c k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \\ P_v(T) &= \frac{1}{4} \left(\frac{2m_v k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Käytännön laskuja varten nämä lausekkeet kannattaa kirjoittaa esim. muotoon

$$\begin{aligned} N_c(T) &= 2.5 \left(\frac{m_c}{m} \right)^{3/2} \left(\frac{T}{300\text{K}} \right)^{3/2} \times 10^{19}/\text{cm}^3 \\ P_v(T) &= 2.5 \left(\frac{m_v}{m} \right)^{3/2} \left(\frac{T}{300\text{K}} \right)^{3/2} \times 10^{19}/\text{cm}^3. \end{aligned}$$

Vaikka käyttäisimmekin yllä johdettuja funktioiden $N_c(T)$ ja $P_v(T)$ eksplisiittisiä lausekkeita emme silti voi vielääkään laskea lukumääritiheyksiä $n_c(T)$ ja $p_v(T)$ koska tämä edellyttäisi kemiallisen potentiaalin μ tuntemista. Tiheyksien tulossa kemiallinen potentiaali kuitenkin supistuu pois:

$$\begin{aligned} n_c p_v &= N_c P_v e^{-(\mathcal{E}_c - \mathcal{E}_v)/k_B T} \\ &= N_c P_v e^{-E_g/k_B T}. \end{aligned}$$

Luontaiset puolijohteet

Jos puolijohde on niin puhdas, että epäpuhtauksien kontribuutio varauksenkuljettajien tiheyteen on

merkityksetön, puhutaan *luontaisista* tai *puhtaista* puolijohteista (*intrinsic semiconductors*). Luontaisten puolijohteiden tapauksessa johtavuusvyön elektronit ovat peräisin valenssivyöltä, joten jokaista johtavuusvyön varauksenkuljettajaa kohti on valenssivyöllä varauksenkuljettaja-aukko ja kääntäen. Tiheyksille on siis voimassa

$$n_c(T) = p_v(T) = n_i(T),$$

missä n_i esittää elektroni- ja aukkotihetyksien yhteistä arvoa. Tämä on ratkaistavissa tulokaavasta

$$n_c p_v = N_c P_v e^{-E_g/k_B T} = n_i^2,$$

eli

$$n_i(T) = [N_c(T) P_v(T)]^{1/2} e^{-E_g/2k_B T}.$$

Kuten edellä tiheys on kirjoitettavissa funktioiden N_c ja P_v eksplisiittisiä esityksiä käyttäen myös muotoon

$$\begin{aligned} n_i(T) &= \frac{1}{4} \left(\frac{2k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (m_c m_v)^{3/4} e^{-E_g/2k_B T} \\ &= 2.5 \left(\frac{m_c}{m} \right)^{3/4} \left(\frac{m_v}{m} \right)^{3/4} \left(\frac{T}{300\text{K}} \right)^{3/2} \\ &\quad \times e^{-E_g/2k_B T} \times 10^{19}/\text{cm}^3. \end{aligned}$$

Asettamalla tiheydet

$$\begin{aligned} n_c(T) &= N_c(T) e^{-(\mathcal{E}_c - \mu)/k_B T} \\ p_v(T) &= P_v(T) e^{-(\mu - \mathcal{E}_v)/k_B T} \end{aligned}$$

yhtäsuuriksi saamme luontaisten puolijohteiden kemialliselle potentiaalille μ_i lausekkeen

$$\mu_i = \mu = \mathcal{E}_v + \frac{1}{2} E_g + \frac{1}{2} k_B T \ln \left(\frac{P_v}{N_c} \right)$$

tai eksplisiittisiä lausekkeita N_c ja P_v käyttäen

$$\mu_i = \mathcal{E}_v + \frac{1}{2} E_g + \frac{3}{4} k_B T \ln \left(\frac{m_v}{m_c} \right).$$

Näemme, että kemiallinen potentiaali μ_i

- lämpötilan lähestyessä nollaa, $T \rightarrow 0$, asettuu täsmälleen energia-aukon puoliväliin,
- vaeltaa korkeintaan kertalukua $k_B T$ olevalle etäisyydelle energia-aukon puolivälistä, koska $\ln(m_v/m_c)$ on kertalukua 1.

Jos siis lämpötila $k_B T$ on pieni energiarakoon E_g verrattuna, sijaitsee kemiallinen potentiaali kaukana energiarakon reunoista $\mathcal{E}_v$ ja $\mathcal{E}_c$, ts. ehtomme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c - \mu &\gg k_B T \\ \mu - \mathcal{E}_v &\ll k_B T \end{aligned}$$

toteutuu. Tämä on voimassa liki kaikille puolijohteille huoneen lämpötilassa ja sitä kylmemmissä ympäristöissä.

Seospuolijohde

Jos epäpuhtaudet kontribuivat huomattavasti varauksenkuljettajien määrään puhutaan *seos-*, *epäpuhtaus-* tai *doupatuista* puolijohdeista (*extrinsic semiconductors*). Tästä ulkoisesta varauksenkuljettajien lisäyksestä johtuen valenssi- ja johtavuusvyön kuljettajatiheyksien ei tarvitse enää olla yhtä suuria:

$$n_c - p_v = \Delta n \neq 0.$$

Tiheyksien erisuuruudesta huolimatta niiden tulo toteuttaa edelleenkin lausekkeen

$$n_c p_v = N_c P_v e^{-E_g/k_B T} = n_i^2,$$

jota voidaan nyt pitää suureen n_i määritelmänä. Sen avulla voimme kirjoittaa

$$\left\{ \begin{array}{c} n_c \\ p_v \end{array} \right\} = \frac{1}{2} [(\Delta n)^2 + 4n_i^2]^{1/2} \pm \frac{1}{2} \Delta n.$$

Suure $\Delta n/n_i$ mittaa epäpuhtauksien merkitystä varauksenkuljettajien lähteenä.

Tarkastellaan tiheyttä n_c kemiallisen potentiaalin μ funktiona

$$n_c = N e^{\beta \mu}.$$

Jos kemiallinen potentiaali on $\mu = \mu_i$ suureen n_c pitäisi redusoitua suureeksi n_i , ts.

$$n_i = N e^{\beta \mu_i},$$

joten

$$n_c = e^{\beta(\mu - \mu_i)} n_i.$$

Vastaavasti saadaan

$$p_v = e^{-\beta(\mu - \mu_i)} n_i.$$

Nähdään, että suhteellinen poikkeama luontaisen puolijohde- kuljettajatiheyksistä on

$$\frac{\Delta n}{n_i} = 2 \sinh \beta(\mu - \mu_i).$$

Tarkastelumme edellyttää edelleenkin, että epäyhtälöt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c - \mu &\gg k_B T \\ \mu - \mathcal{E}_v &\ll k_B T \end{aligned}$$

ovat voimassa, ts. että μ on kaukana vöiden reunoista $\mathcal{E}_c$ ja $\mathcal{E}_v$. Nyt

- tiedämme, että ehto toteutuu suurelle μ_i , jos energiarako on suuri verrattuna lämpötilaan $k_B T$,
- yhtälön $\Delta n/n_i = 2 \sinh \beta(\mu - \mu_i)$ perusteella μ poikkeaa luontaisesta tiheydestä μ_i korkeintaan kertaluvulla $k_B T$, ellei epäpuhtauksien tuomien varauksenkuljettajien lisäys ole useita kertalukuja suurempi kuin luontainen tiheys n_i .

Lukuunottamatta äärimmäisiä epäpuhtausdoppauksia tarkastelumme on siis voimassa seospuolijohdeille normaaliolosuhteissa.

Epäpuhtaustilat

Epäpuhtauksia, jotka luovuttavat elektroneja johtavuusvyölle, sanotaan *donoreiksi* (*donor*) ja epäpuhtauksia, jotka luovuttavat aukkoja valenssivyölle *akseptoreiksi* (*acceptor*).

Katsotaan esimerkkinä germaniumia (Ge). Sen valenssi on neljä ja se luovuttaa neljä elektronia valenssivyölle. Korvataan germanium-kiteessä yksi atomi arseenilla (As), jonka valenssi on viisi. Alkuperäiseen kiteeseen nähden

- yksi hilapiste saa $+e$ suuruisen ylimääräisen varauksen
- valenssivyö muokkautuu (minimaalisen) vähän ylimääräisestä varauksesta johtuen, mutta on edelleenkin täynnä
- ylimääräinen elektroni sitoutuu ylimääräiseen hilapisteeseen lokalisoituneeseen $+e$ varaukseen.

Vapaan As-atomin ionisaatioenergia on ≈ 10 eV.

Ge-kiteessä As-atomin ionisaatioenergia on kuitenkin vain 0.013 eV, sillä

- arseeniatomiin sitoutunut elektroni kokee Ge-kiteen elektronien varjostuksen, dielektrisyysvakio on $\epsilon \approx 16$. Yleensäkin puolijohdeiden dielektrisyysvakiot ovat varsin suuria, tyypillisesti 10 – 20 mutta voivat olla 100 tai enemmän,
- puolijohdekiteessä liikkuvaa elektronia ei pidä käsitellä vapaana elektronina vaan sen energia riippuu sen asemasta johtavuusvyöllä, ts. sen energia on $\mathcal{E}(\mathbf{k})$. Vastaavasti sidottu tila pitää muodostaa johtavuusvyön Blochin tilojen superpositiona. Käytännössä pitää siis epäpuhtauteen sidotun elektronin tilan määrittämiseen käyttää johtavuusvyön minimiin liittyvää efektiivistä massaa m^* , joka on tyypillisesti kertalukua 0.1 m .

Määritäksemme donoriepäpuhtauteen sitoutuneen elektronin energian pitää siis tarkastella

- $-e$ varauksista m^* massaista hiukasta
- $+e/\epsilon$ varauksisen hiukkasen Coulombin kentässä.

Tämä on täsmälleen sellainen vetyatomiprobleema, missä elektronin massa m on korvattu massalla m^* ja ytimen varaus $+e$ varauksella e/ϵ . Bohrin radan säde, joka vetyatomilla on

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2},$$

on siis nyt

$$r_0 = \frac{m}{m^*} \epsilon a_0.$$

Vastaavasti vedyn perustilan sidosenergia

$$1 \text{ Ry} = \frac{m e^4}{2 \hbar^2} = 13.6 \text{ eV}$$

korvautuu energialla

$$\mathcal{E} = \frac{m^*}{m} \frac{1}{\epsilon^2} \text{ Ry.}$$

Sidosenergia $\mathcal{E}$ on siis energia, joka tarvitaan epäpuhtauteen sitoutuneen elektronin nostamiseksi johtavuusvyölle. Tämä energia on tyypillisesti vain kertaluokkaa meV (As-epäpuhtaudelle Ge-kiteessä 13 meV) eli hyvin pieni verrattuna energiarakoon E_g . Voimme siis sanoa, että donoriepäpuhtaustilat ovat energia-aukossa hyvin lähellä johtavuusvyön minimiä $\mathcal{E}_c$. Tilan virittyessä epäpuhtauteen sitoutunut elektroni siirtyy johtavuusvyölle.

Täsmälleen sama tarkastelu voidaan tehdä akseptoriepäpuhtauksille. Seurauksena on nytkin epäpuhtaustila energia-aukossa hyvin lähellä valenssivyön maksimia. Tässä on huomattava, että epäpuhtaustilan ollessa miehittettynä, se on elektronien kannalta tyhjä (negatiivisesti varattu epäpuhtausioni sitoo positiivisesti varatun aukon). Tilan virittyessä siirtyy valenssivyöltä elektroni tähän lokalisoituneeseen tilaan jättäen jälkeensä aukon valenssivyölle.

Epäpuhtaustilojen miehitys

Donoritilat

Elektronien välisen vuorovaikutuksen unohtaen epäpuhtaustila voi olla tyhjä, yhden elektronin miehittämä tai kahden (spin $|\uparrow\rangle$ ja $|\downarrow\rangle$) elektronin miehittämä. Coulombin repulsio kahden lokalisoituneen elektronin välillä tekee kuitenkin kaksoismiehityksestä käytännössä kielletyn.

Termisessä tasapainossa elektronien keskimääräinen lukumäärä on

$$\langle n \rangle = \frac{\sum N_j e^{-\beta(E_j - \mu N_j)}}{\sum e^{-\beta(E_j - \mu N_j)}},$$

missä summaus käy yli systeemin kaikkien tilojen suureiden E_j ja N_j ollessa vastaavasti tilan energian ja elektronien lukumäärän.

Yhden donorin tapauksessa tiloja on täsmälleen kolme:

1. ei yhtään elektronia, jolloin tilan energia on nolla,
2. yksi elektroni spin-tilassa $|\uparrow\rangle$, jolloin energia on $\mathcal{E}_d$ ja
3. yksi elektroni spin-tilassa $|\downarrow\rangle$, jolloin energia on $\mathcal{E}_d$.

Donoritilan keskimääräinen miehitysluku on siis

$$\langle n \rangle = \frac{2e^{-\beta(\mathcal{E}_d - \mu)}}{1 + 2e^{-\beta(\mathcal{E}_d - \mu)}} = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\beta(\mathcal{E}_d - \mu)} + 1}.$$

Jos N_d on donoritiheys, niin donoreihin sitoutuneiden elektronien tiheys n_d on siten

$$n_d = \frac{N_d}{\frac{1}{2}e^{\beta(\mathcal{E}_d - \mu)} + 1}.$$

Akseptoritilat

Ajatellaan akseptori-onia $-e$ -varauksisena epäpuhtautena. Tämä epäpuhtaus

- voi sitoa heikosti yhden $+e$ -varauksisen aukon, ts. yksi elektroni siirtyy valenssivyöltä lokalisoituun akseptoritilaan,
- voi ionisoida sitomansa aukon, ts. täyttää elektronilla miehittämättömän tilan eli nostaa valenssivyöltä toisen elektronin lokalisoituun akseptoritilaan,
- ei voi Coulombin repulsiosta johtuen sitoa kahta $+e$ -varauksista aukkoa, ts. akseptoritila ei voi koskaan olla miehittämätön (elektronien kannalta).

Akseptoritilassa olevien *elektronien* keskimääräinen lukumäärä on nyt

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \frac{2e^{-\beta(\mathcal{E}_a - \mu)} + 2e^{-\beta(2\mathcal{E}_a - 2\mu)}}{2e^{-\beta(\mathcal{E}_a - \mu)} + e^{-\beta(2\mathcal{E}_a - 2\mu)}} \\ &= \frac{e^{\beta(\mu - \mathcal{E}_a)} + 1}{\frac{1}{2}e^{\beta(\mu - \mathcal{E}_a)} + 1}. \end{aligned}$$

Vastaavasti akseptorin sitomien *aukkojen* lukumäärä $\langle p \rangle$ on tilaan mahtuvien elektronien maksimäärän ja siinä olevien elektronien määrän erotus eli

$$\langle p \rangle = 2 - \langle n \rangle.$$

Jos siis N_a on akseptoritiheys, niin akseptoreihin sitoutuneiden aukkojen tiheys p_a on

$$p_a = \frac{N_a}{\frac{1}{2}e^{\beta(\mu - \mathcal{E}_a)} + 1}.$$

Seospuolijohteiden varauksenkuljettajien tiheys

Tarkastellaan puolijohdetta, jonka akseptoritiheys on N_a ja donoritiheys N_d ja oletetaan, että $N_d \geq N_a$.

Nollalämpötilassa donoreiden tuomista N_d elektronista N_a voi sitoutua akseptorien synnyttämiin lokalisoituihin tiloihin. Päädytään tilanteeseen, jossa

- valenssivyö on täynnä, $p_v = 0$,
- akseptoritilat ovat täynnä (elektroneja) eli $p_a = 0$,
- $N_d - N_a$ donoritilaa on miehitetty, $n_d = N_d - N_a$
- johtavuusvyö on tyhjä, $n_c = 0$.

Lämpötilan kasvaessa elektronit jakautuvat tiloihin eri tavalla mutta koska niiden lukumäärä säilyy, täytyy johtavuusvyölle ja donoritiloihin termisten viritysten seurauksena siirtyneiden elektronien lukumäärän $n_c + n_d - (N_d - N_a)$ olla täsmälleen saman kuin valenssivyön ja akseptorien sitomien aukkojen lukumäärä $p_v + p_a$. Tiheydet tottelevat siis yhtälöä

$$n_c + n_d = N_d - N_a + p_v + p_a.$$

Helposti nähdään, että tämä yhtälö on voimassa myös tapauksessa $N_d < N_a$.

Oletetaan nyt, että donori- ja akseptoritilat toteuttavat ehdot

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_d - \mu &\gg k_B T \\ \mu - \mathcal{E}_a &\gg k_B T.\end{aligned}$$

Koska nämä energiatasot ovat yleensä hyvin lähellä vyön reunoja $\mathcal{E}_c$ ja $\mathcal{E}_v$, joille yo. ehdot ovat normaaliolosuhteissa voimassa, ovat ne hyvällä tarkkuudella voimassa myös epäpuhtaustasollekin. Ehtojen

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_d - \mu &\gg k_B T \\ \mu - \mathcal{E}_a &\gg k_B T\end{aligned}$$

lisäksi donori- ja akseptoritilojen miehityksille oli voimassa

$$\begin{aligned}n_d &= \frac{N_d}{\frac{1}{2}e^{\beta(\mathcal{E}_d - \mu)} + 1} \\ p_a &= \frac{N_a}{\frac{1}{2}e^{\beta(\mu - \mathcal{E}_a)} + 1}.\end{aligned}$$

Nähdään, että termiset eksitaatiot ionisoivat epäpuhtaudet liki täydellisesti, ts. $n_d \ll N_d$ ja $p_a \ll N_a$, joten hyvällä tarkkuudella on voimassa

$$\Delta n = n_c - p_v = N_d - N_a.$$

Mobiileille aukoille ja elektroneille johtamamme lausekkeet

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{c} n_c \\ p_v \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} [(\Delta n)^2 + 4n_i^2]^{1/2} \pm \frac{1}{2} \Delta n \\ \frac{\Delta n}{n_i} &= 2 \sinh \beta(\mu - \mu_i)\end{aligned}$$

voimme nyt kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{c} n_c \\ p_v \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} [(N_d - N_a)^2 + 4n_i^2]^{1/2} \pm \frac{1}{2} [N_d - N_a] \\ \frac{N_d - N_a}{n_i} &= 2 \sinh \beta(\mu - \mu_i).\end{aligned}$$

Pienillä douppauksilla (N_d ja N_a pieniä) varauksenkuljettajien tiheydet ovat

$$\left\{ \begin{array}{c} n_c \\ p_v \end{array} \right\} \approx n_i \pm \frac{1}{2} [N_d - N_a],$$

eli luontaisten puolijohteiden tiheydet korjattuna pienellä termillä. Vastaavasti suurilla douppausasteilla tiheydet ovat

$$\begin{aligned}n_c &\approx N_d - N_a \\ p_v &\approx \frac{n_i^2}{N_d - N_a}\end{aligned}$$

kun $N_d > N_a$ ja

$$\begin{aligned}p_v &\approx \frac{n_i^2}{N_a - N_d} \\ n_c &\approx N_a - N_d\end{aligned}$$

kun $N_a > N_d$.