

KAAVAKOKOELMA

Hermitén polynomien perusominaisuuksia:

1. Differentiaaliyhtälö: $H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) + 2nH_n(\xi) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$
2. Ortonormaalisuus: $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi)H_m(\xi)e^{-\xi^2}d\xi = \delta_{mn}2^n n! \sqrt{\pi}$
3. Rodriguesin kaava: $H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$
4. Palautuskaavat: $H_n'(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi)$; $H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi)$
5. Muodostaja- eli generoiva funktio: $e^{-s^2+2s\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} s^n$

Yksidimensioisen harmonisen oskillaattorin normitetut aaltofunktiot yksiköissä, $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$,

$$\psi_n(x) = \mathcal{N}_n H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2}; \quad \mathcal{N}_n = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

Laplace operaattori pallokoordinaatistossa

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

Legendren polynomien perusominaisuuksia:

1. Differentiaaliyhtälö: $(1-z^2)P_\ell''(z) - 2zP_\ell'(z) + \ell(\ell+1)P_\ell(z) = 0$
2. Ortogonaalisuus: $\int_{-1}^1 P_\ell(z)P_k(z)dz = \int_0^\pi P_\ell(\cos \theta)P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell k}$
3. Rodriguesin kaava: $P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2-1)^\ell$
4. Symmetria: $P_\ell(-z) = (-1)^\ell P_\ell(z)$
5. Palautuskaava: $(\ell+1)P_{\ell+1}(z) - z(2\ell+1)P_\ell(z) + \ell P_{\ell-1}(z) = 0$
6. Alimman kertaluvun polynomeja:

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad \text{jne.}$$

Assosioitujen Legendren funktioiden ominaisuuksia:

1. Määritelmä, kun $m \geq 0$: $P_\ell^m(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_\ell(z)$
2. Määritelmä, kun $|m| \leq \ell$: $P_\ell^m(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dz^{\ell+m}} (z^2-1)^\ell$

3. Differentiaaliyhtälö: $(1-z)^2 \frac{d^2}{dz^2} P_\ell^m(z) - 2z \frac{d}{dz} P_\ell^m(z) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right) P_\ell^m(z) = 0$
4. Ortogonaalisuus: $\langle P_\ell^m | P_{\ell'}^m \rangle = \int_{-1}^1 P_\ell^m(z) P_{\ell'}^m(z) dz = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}$
5. Kvanttiluvun m merkin vaihto: $P_\ell^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(z)$
6. Symmetria: $P_\ell^m(-z) = (-1)^{\ell+m} P_\ell^m(z)$
7. Arvo pisteessä $z = 1$: $P_\ell^m(1) = \delta_{m0}$
8. Palautuskaavat: $(2\ell+1) t P_\ell^m(t) = (\ell+m) P_{\ell-1}^m(t) + (\ell-m+1) P_{\ell+1}^m(t)$
ja $(2\ell+1) \sqrt{1-t^2} P_\ell^{m-1}(t) = P_{\ell+1}^m(t) - P_{\ell-1}^m(t)$,

Pallofunktioiden tärkeimmät ominaisuudet:

1. Määritelmä: $Y_m^\ell(\theta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} (-1)^m e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos \theta)$
2. Kompleksikonjugaatti: $Y_m^{*\ell}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{-m}^\ell(\theta, \varphi)$
3. Ortogonaalisuus: $\langle Y_{m'}^{\ell'} | Y_m^\ell \rangle = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{m'}^{*\ell'}(\theta, \varphi) Y_m^\ell(\theta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$
4. Arvo pisteessä $\theta = 0$: $Y_m^\ell(0, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \delta_{m0}$
5. Summakaava: merkintä $\hat{r}$ viittaa vektorin $\vec{r}$ suuntaiseen yksikkövektoriin.

$$P_\ell(\hat{r}' \cdot \hat{r}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_m^{*\ell}(\hat{r}') Y_m^\ell(\hat{r})$$

Harmoonisen oskillaattorin aaltofunktio pallokoordinaateissa:

$$\psi_{N\ell m}(r) = \mathcal{N}_{N\ell} e^{-\frac{r^2}{2}} r^\ell L_n^{\ell+\frac{1}{2}}(r^2) Y_m^\ell(\theta, \varphi), \quad \mathcal{N}_{N\ell} = \sqrt{\frac{2(n!)}{\Gamma(n+\ell+\frac{3}{2})}}$$

Vetyatomien aaltofunktio pallokoordinaateissa:

$$\psi_{n\ell m}(\vec{r}) = \frac{1}{r} u_{n,\ell}(r) Y_m^\ell(\theta, \varphi); \quad u_{n\ell}(r) = \mathcal{N}_{n\ell} r^{\ell+1} e^{-\frac{r}{n}} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{n}\right); \quad \mathcal{N}_{n\ell} = \sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{\Gamma(\ell+n+1)2n}} \left(\frac{2}{n}\right)^{2\ell+3}$$

Laguerren polynomien ominaisuuksia:

1. Differentiaaliyhtälö: $x L_k''^\alpha(x) + (\alpha+1-x) L_k'^\alpha(x) + k L_k^\alpha(x) = 0$
2. Rodriguesin kaava: $L_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha})$
3. Muodostajafunktio: $\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} e^{\frac{xz}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) z^n$
4. Palautuskaavat: $(n+1) L_{n+1}^\alpha(x) = (2n+\alpha+1-x) L_n^\alpha(x) - (n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(x)$
ja $x L_{n+1}^{\alpha+1}(x) = (n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(x) - (n-x) L_n^\alpha(x)$
5. Ortogonaalisuus: $\int_0^\infty e^{-t} t^\alpha L_n^\alpha(t) L_{n'}^\alpha(t) dt = \delta_{nn'} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$

Vektorilaskennan kaavoja

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{V}) &= \vec{U}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} - \vec{V}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) - (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \\ (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} &= \vec{A} \\ (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}(\vec{r}) &= r \frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial r} \\ (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\phi(\vec{r}) &= r \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial r} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{r} &= 3\end{aligned}$$