

Fermionisysteemejä

Elektronikaasu

Ideaalinen fermikaasu on hyvä aproksimaatio mm. metallien johtavuuselektroneille.

Yksihiukkastilatiheys energian ollessa $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ on

$$\begin{aligned}\omega_1(\epsilon) &= V \frac{g_s}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \\ &= V 2\pi g_s \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}.\end{aligned}$$

Tiheydeksi saadaan

$$\rho = \frac{\bar{N}}{V} = \frac{g_s}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}.$$

Energia hiukasta kohti tulee olemaan

$$\bar{\epsilon} = \frac{E}{\bar{N}} = \frac{\int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}}{\int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}}.$$

Degeneroitunut fermikaasu

Oletetaan, että $k_B T \ll \mu$.

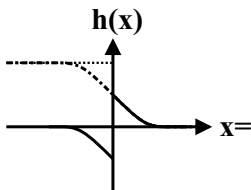
Kirjoitetaan

$$\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = \theta(\mu - \epsilon) + h(\epsilon - \mu),$$

missä

$$h(x) = \text{sign}(x) \frac{1}{e^{\beta|x|} + 1}.$$

Funktio $h(x)$ poikkeaa nolasta vain kapealla alueella $|x| \lesssim k_B T \ll \mu$.



Lasketaan integraalia

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\epsilon \frac{\phi(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \\ &= \int_0^\infty d\epsilon \phi(\epsilon) [\theta(\mu - \epsilon) + h(\epsilon - \mu)] \\ &= \int_0^\mu d\epsilon \phi(\epsilon) + \int_0^\infty d\epsilon h(\epsilon) [\phi(\mu + \epsilon) - \phi(\mu - \epsilon)] \\ &\quad + \int_\mu^\infty d\epsilon h(\epsilon) \phi(\mu - \epsilon).\end{aligned}$$

Viimeinen termi on kertalukua

$$h(\mu) = \frac{1}{e^{\mu/k_B T} + 1} \approx e^{-\mu/k_B T}$$

ja voidaan näin ollen jättää pois.

Jos $\phi(\epsilon)$ on kyllin säännöllinen alueella $\epsilon \approx \mu$, voidaan kehittää

$$\phi(\mu + \epsilon) - \phi(\mu - \epsilon) \approx 2\phi'(\mu)\epsilon + 2\frac{1}{3!}\phi'''(\mu)\epsilon^3 + \dots$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\epsilon \frac{\phi(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \\ \approx \int_0^\mu d\epsilon \phi(\epsilon) \\ + 2\phi'(\mu)(k_B T)^2 \int_0^\infty dz \frac{z}{e^z + 1} \\ + 2\phi'''(\mu) \frac{1}{3!} (k_B T)^4 \int_0^\infty dz \frac{z^3}{e^z + 1} \\ + \dots\end{aligned}$$

ja saamme *Sommerfeldin kehitelmän*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\epsilon \frac{\phi(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \approx \int_0^\mu d\epsilon \phi(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \phi'(\mu) \\ + \frac{7\pi^4}{360} (k_B T)^4 \phi'''(\mu) + \dots\end{aligned}$$

Lämpötila $T = 0$

Nyt

$$\bar{n}(\epsilon) = \theta(\mu - \epsilon)$$

ja $h(x) = 0$.

Fermienergia on

$$\epsilon_F = \mu = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}.$$

Fermi-impulssi on

$$p_F = \hbar k_F.$$

Tiheys on

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{g_s}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\mu d\epsilon \sqrt{\epsilon} \\ &= \frac{g_s}{6\pi^2} \left(\frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2} \right)^{3/2}\end{aligned}$$

eli

$$\rho = \frac{g_s}{6\pi^2} k_F^3.$$

Elektroneille spindegeneraatiotekijä on $g_s = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$, joten

$$\rho = \frac{k_F^3}{3\pi^2}.$$

Energiaksi hiukasta kohti saadaan

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &= \epsilon_F \frac{\int_0^1 dx x^{3/2}}{\int_0^1 dx x^{1/2}} = \epsilon_F \frac{2/5}{2/3} \\ &= \frac{3}{5} \epsilon_F.\end{aligned}$$

Kokonaisenergia on

$$E = \frac{3}{5} \epsilon_F N = \frac{3}{5} N \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2 \rho}{g_s} \right)^{2/3}.$$

Koska

$$E = \text{vakio} \times N^{5/3} V^{-2/3},$$

niin

$$-p = \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_N = -\frac{2}{3} \frac{E}{V}$$

eli

$$pV = \frac{2}{3} E.$$

Metallin elektronikaasu

Kun kirjoitetaan tiheys muotoon

$$\rho = \frac{\bar{N}}{V} = \frac{1}{\frac{4}{3} \pi r_i^3}$$

ja määritellään laaduton luku

$$r_s = \frac{r_i}{a_0},$$

missä a_0 on Bohrin radan säde

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0.529\text{\AA},$$

nähdään, että

$$\rho = \frac{1.613 \cdot 10^{30}}{r_s^3} \frac{1}{\text{m}^3}.$$

Metalleille on

$$1.9 \lesssim r_s \lesssim 5.6.$$

Fermi-aaltovektoriksi saadaan

$$k_F = \frac{1}{a_0 r_s} \sqrt[3]{\frac{9\pi}{4}} = \frac{1.92}{a_0 r_s}.$$

Fermi-nopeus on

$$\begin{aligned} v_F &= \frac{p_F}{m} = \frac{\hbar k_F}{m} = \frac{1.92\hbar}{ma_0 r_s} \\ &= \frac{4.2 \cdot 10^6 \text{ m}}{r_s} \frac{1}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Esim. alumiinissa on

$$v_F = 2029 \frac{\text{km}}{\text{s}} = \frac{c}{148}.$$

Fermilämpötila eli degeneraatiolämpötila T_F määritellään siten, että

$$k_B T_F = \epsilon_F.$$

Nyt

$$\epsilon_F = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}}_{\text{vetyatomin sidosenergia}} \left(\frac{1.92}{r_s} \right)^2 = \frac{3.69}{r_s^2} 13.6 \text{ eV}.$$

Koska

$$1 \text{ eV} = 11604 k_B \text{ K},$$

on

$$T_F = \left(\frac{1.92}{r_s} \right)^2 13.6 \cdot 11604 \text{ K}.$$

Alumiinille Fermilämpötila on $T_F = 136\,000 \text{ K}$. Yleensäkin metalleille on

$$T \ll T_F,$$

joten metallien elektronikaasu on aina vahvasti degeneroitunut.

Ominaislämpö Olkoon nyt $T > 0$, mutta $T \ll T_F$.

Tarvitaan $\mu = \mu(T)$, kun $\frac{\bar{N}}{V} = \rho$ tunnetaan.

Sommerfeldin kehittämän avulla saamme

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2} &= \frac{4\pi^2}{g_s} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{3/2} \rho = \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \\ &\approx \frac{2}{3} \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} (k_B T)^2 \frac{1}{\sqrt{\mu}} + \dots \end{aligned}$$

ja voimme kirjoittaa

$$\frac{2}{3} \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (k_B T)^2 \frac{1}{\epsilon_F^2} + \dots \right] = \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2}.$$

Tästä saamme kemialliselle potentiaalille lausekkeen

$$\mu(T) = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right].$$

Käyttäen jälleen Sommerfeldin kehittämää saamme

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} &\approx \frac{2}{5} \mu^{5/2} + \frac{\pi^2}{4} (k_B T)^2 \sqrt{\mu} + \dots \\ &= \frac{2}{5} \epsilon_F^{5/2} \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

Nyt energia/hiukkanen on

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}(T) &= \frac{\int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}}{\int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}} \\ &= \frac{3}{5} \epsilon_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \right] \\ &= \frac{3}{5} \epsilon_F + \frac{\pi^2}{4} \frac{k_B^2 T^2}{\epsilon_F}. \end{aligned}$$

Ominaislämpö, joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{\partial N \bar{\epsilon}}{\partial T} = N \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B^2}{\epsilon_F} T \\ &= N k_B \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F}, \end{aligned}$$

on pieni verrattuna esim. Maxwell-Boltzmannin kaasun ominaislämpöön ($C_V = N k_B \frac{3}{2}$). Tämä on ymmärrettävää, sillä niiden hiukkasten lukumäärä, jotka voidaan eksitoida termisesti energialla $\sim k_B T$ on Paulin kieltoäännöstä johtuen $\ll$ MB- tai BE-kaasulla.

Paulin paramagnetismi

Elektronin magneettinen momentti on

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{m} \mathbf{s}$$

tai

$$\mu_z = -\mu_B \sigma_z,$$

missä

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 5.66 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}}$$

ja

$$\sigma_z = \frac{2}{\hbar} s_z = \pm 1.$$

Ulkoisessa magneettikentässä on elektronin energia

$$\epsilon_{\mathbf{p}\sigma_z} = \epsilon_{p\pm} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu_z B = \epsilon_{\mathbf{p}} + \mu_B B \sigma_z$$

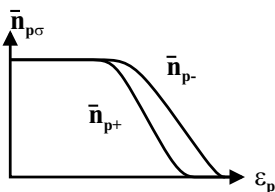
kun elektronin kineettinen energia on

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}.$$

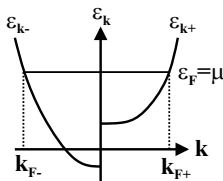
Käsitellään elektroneja edelleen vuorovaikuttamattomina, jolloin suurkanoninen tilasumma on kuten edellä, kunhan korvataan $\epsilon_{\mathbf{p}} \rightarrow \epsilon_{\mathbf{p}} + \mu_B B \sigma_z$.

Tilojen miehitysluvut ovat nyt

$$\bar{n}_{\mathbf{p}\sigma_z} = \bar{n}_{p\pm} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{p}} + \mu_B B \sigma_z - \mu)} + 1}.$$



Koska metallin elektronikaasu on voimakkaasti degeneroitunut ($T \ll T_F$), tarkastellaan lämpötilaa $T = 0$.



Fermi-aaltovektorit määräytyvät ehdoista

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2 k_{F+}^2}{2m} + \mu_B B &= \mu \\ \frac{\hbar^2 k_{F-}^2}{2m} - \mu_B B &= \mu. \end{aligned}$$

Koska tiheys on

$$\rho = \frac{g_s}{6\pi^2} k_F^3,$$

ovat spin-populaatioiden tiheydet

$$\begin{aligned} \rho_+ &= \frac{k_{F+}^3}{6\pi^2} \\ \rho_- &= \frac{k_{F-}^3}{6\pi^2}. \end{aligned}$$

Jos magneettikentän voimakkuus on

$$B_0 = \frac{\epsilon_F}{\mu_B},$$

on magneettinen energia samaa kertalukua kuin fermienergia. Metalleilla $\epsilon_F \approx 5\text{eV}$, joten $B_0 \approx 10^5\text{T}$. Realistiset magneettikentät ovat siten $\ll B_0$ ja voimme laskea pienen B :n rajalla. Merkitään

$$k_{F\pm} = k_F \pm \delta k_F,$$

jolloin

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2 k_{F\pm}^2}{2m} \pm \mu_B B &= \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \pm \frac{\hbar^2 k_F}{m} \delta k_F \pm \mu_B B \\ &= \mu = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}. \end{aligned}$$

Tästä saamme

$$\delta k_F = -\frac{m\mu_B}{\hbar^2 k_F} B$$

ja

$$\begin{aligned} \rho_{\pm} &= \frac{k_F^3}{6\pi^2} \pm \frac{k_F^2}{2\pi^2} \delta k_F \\ &= \frac{k_F^3}{6\pi^2} \mp \frac{k_F m \mu_B}{2\pi^2 \hbar^2} B. \end{aligned}$$

Suhteellinen polarisaatio on

$$\begin{aligned} r &\equiv \frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ + \rho_-} = -\frac{3m\mu_B}{\hbar^2 k_F^2} B \\ &= -\frac{3\mu_B}{2\epsilon_F} B. \end{aligned}$$

Magnetoituma tilavuusyksikköä kohti on

$$M = \frac{N}{V} \langle \mu_z \rangle = -\rho \mu_B \langle \sigma_z \rangle = -\rho \mu_B r$$

eli

$$M = \frac{3}{2} \rho \frac{\mu_B^2}{\epsilon_F} B.$$

Suskeptiivisuus on määritelmänsä mukaan

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B}.$$

Paulin paramagneettinen suskeptiivisuus on siten

$$\chi = \frac{3}{2} \mu_0 \rho \frac{\mu_B^2}{\epsilon_F}$$

edellyttäen, että $T \ll T_F$ ja $\mu_B B \ll \epsilon_F$.

Alumiinille elektronitiheys on

$$\rho = 1.82 \cdot 10^{29} \text{m}^{-3}$$

ja fermienergia

$$\epsilon_F = \left(\frac{1.92}{2.07} \right)^2 13.6 \text{eV} = 11.7 \text{eV}.$$

Suskeptiivisuus

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{3}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.82 \cdot 10^{29} \cdot \frac{(5.66 \cdot 10^{-5})^2}{11.7} \\ &\quad \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \frac{1}{\text{m}^3} \frac{(\text{eV})^2}{\text{T}^2 \text{eV}} \\ &= 9.4 \cdot 10^{13} \frac{\text{eV Vs}}{\text{Am}^4} \left(\frac{\text{m}^2}{\text{Vs}} \right)^2 \\ &= 9.4 \cdot 10^{13} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \\ &= 1.5 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

on silloin pieni, sillä vain fermipinnan välittömässä läheisyydessä olevat elektronit voivat polarisoitua magneettisesti.

Kaksiulotteinen elektronikaasu

Tarkastellaan elektronia, jonka liike on rajoitettu kaksiulotteiseen xy -tasoon. Magneettikentässä

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

liikuvan vuorovaikuttamattoman elektronin Hamilton on

$$H_0 = \frac{1}{2m} (\Pi_x^2 + \Pi_y^2),$$

missä

$$\mathbf{\Pi} = -i\hbar\nabla + e\mathbf{A}$$

ja $\mathbf{A}$ on vektoripotentiaali.

Otetaan käyttöön *magneettinen pituus*

$$\ell_0 = \left(\frac{\hbar}{eB} \right)^{1/2}.$$

ja *syklotronifrekvenssi*

$$\omega_c = \frac{eB}{m}.$$

Oletetaan, että $\mathbf{B}$ on z -akselin suuntainen.

Vektoripotentiaalille voidaan valita *Landau-mitta*

$$\mathbf{A} = (0, Bx, 0).$$

Tässä mitassa Hamiltonin operaattori on

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + (p_y + eBx)^2 \right].$$

Vastaavassa Schrödingerin yhtälössä muuttujat voidaan erottaa yritteellä

$$\phi = e^{ik_y y} \chi(x).$$

Funktion $\chi(x)$ on toteutettava yhtälö

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \chi'' + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (x - X)^2 \chi = E \chi,$$

missä $X = -k_y \ell_0^2$. Tämä yhtälö kuvaa ilmeisestikin tasapainopisteen X suhteen jousivakiolla

$$\hbar \omega_c = \frac{\hbar^2}{m \ell_0^2}$$

värähtelevää yksiulotteista harmonista oskillaattoria. Ominaisarvot ovat niin ollen

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ja vastaavat (normittamattomat) ominaisfunktiot

$$\phi_{nX} = e^{ik_y y} e^{-(x-X)^2/2\ell_0^2} H_n[(x-X)/\ell_0],$$

missä H_n on Hermiten polynomi.

Asetetaan periodiset reunaehdot:

- elektroni liikkuu suorakaiteessa, jonka sivut ovat L_x ja L_y .

- y -suunnassa aaltofunktio on tasoaalto $e^{ik_y y}$, joten sallitut aaltovektorin arvot ovat

$$k_y = \frac{2\pi n_y}{L_y}, \quad n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- x -suunnassa harmonisen liikkeen keskus

$$X = -k_y \ell_0^2 = \frac{2\pi n_y}{L_y} \ell_0^2$$

on rajoitettu välille $0 \leq X < L_x$ eli

$$n_y = \frac{X L_y}{2\pi \ell_0^2}, \quad 0 \leq X < L_x.$$

Energiatilaan E_n liittyviä ominaistiloja ϕ_{nX} on niin ollen kaikkiaan

$$N_s = \frac{L_x L_y}{2\pi \ell_0^2}$$

kappaletta, ts. energiatilan E_n eli *Landau-tason* n degeneraatio on N_s .

Määritellään *vuokvantti* Φ_0 siten, että

$$\Phi_0 = \frac{h}{e}.$$

Nähdään, että pituusyksikön ℓ_0 avulla on

$$\Phi_0 = B 2\pi \ell_0^2.$$

Degeneraatio voidaan siis ilmaista myös muodossa

$$N_s = \frac{B L_x L_y}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0},$$

missä Φ on $L_x \times L_y$ -suorakaiteen lävistävä magneettivuoto. Olkoon ρ_0 elektronien tiheys tasolla eli

$$\rho_0 = \frac{N}{L_x L_y},$$

missä N on elektronien lukumäärä

$L_x \times L_y$ -suorakaiteessa. Määritellään *täyttösuhde* ν siten, että

$$\nu = 2\pi \ell_0^2 \rho_0.$$

Se voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\nu = 2\pi \ell_0^2 \frac{N}{L_x L_y} = \frac{N}{N_s}.$$

Kokonaislukuinen ν vastaa siis täyttä Landau-tasoa.

Kokonaislukuisesti kvantittunut Hall-ilmio

Asetetaan xy -tasossa oleva elektronikaasu z -akselin suuntaiseen magneettikenttään B . Ajetaan x -suunnassa virta I_x systeemin läpi. Kun tarvittava sähkökenttä on E_x , on vastaava vastus

$$R_{xx} = \frac{E_x}{I_x}.$$

Kuten tunnettua, generoituu (Lorentz-voimien vaikutuksesta) myös kohtisuoraan suuntaan sähkökenttä E_y . Suuretta

$$R_{xy} = \frac{E_y}{I_x}$$

sanotaan *Hall-vastukseksi*. Täyttösuhdetta

$$\nu = 2\pi\ell_0^2\rho_0 = \frac{2\pi\hbar}{e} \frac{\rho_0}{B}$$

voidaan varioida joko muuttamalla elektronitiheyttä ρ_0 tai magneettikentän voimakkuutta B . Osoittautuu, että täyttösuhteen ν ollessa likimain jonkin pienen kokonaisluvun n suuruinen

- Hall-vastus saa arvon

$$R_H = R_{xy} = \frac{h}{ne^2}$$

ja pysyy tässä arvossa vaikka täyttösuhdetta hieman muutettaisiinkin. Hall-vastus R_H on siis likimain kvantittunut.

- ajavan kentän suuntainen vastus R_{xx} häviää.

Tämä ilmiö tunnetaan *kokonaislukuisesti kvantittuneena Hall-ilmionä* (*Integer Quantum Hall Effect, IQHE*).

Koska kvantisointiehdon $R_H = h/ne^2$ on havaittu toteutuvan erittäin tarkasti (suhteellinen virhe $< 10^{-8}$), on sovittu, että IQHE:tä käytetään vastuksen standardina. ISO-standardin mukaan $R_H = R_K/n$, missä

$$R_K = 25812.807\Omega$$

on *von Klitzingin vakio*.

Kvalitatiivisesti IQHE voidaan ymmärtää seuraavasti:

- reaalissa materiaalissa on epäpuhtauksia, joiden vaikutuksesta Landau-tasoilla on energian funktiona tietty leveys.
- Landau-tasoilla olevien elektronien tilat ovat *laajennettuja* (*extended*), kuten esim. tasoaallot $e^{ik_y y}$. Nämä elektronit voivat osallistua virran kuljetukseen.
- elektronit, joiden energia sattuu Landau-tasojen ulkopuolelle, ovat sitoutuneet epäpuhtauksiin. Nämä *lokalisoituneet* elektronit eivät voi kuljettaa virtaa.
- Fermipinnan osuessa Landau-tasolle laajennetut tilat voivat esteettä kuljettaa virtaa. Elektronien lisääminen Landau-tasolle lisää virrankuljettajien lukumäärää. Tämä vastaa R_H -käyrän tasanteiden välistä aluetta.
- Landau-tason täytyttyä lisätyt elektronit joutuvat lokalisoituihin tiloihin, jotka eivät kuljeta virtaa. Tällöin virran kuljettajien määrä ei lisäännä, joten R_H pysyy vakiona. Ollaan siis R_H -käyrän tasanteella.

Kvantitatiivinen ymmärtäminen ($R_H = h/ne^2$) edellyttää *kuljetusteorian* tuntemusta.

Relativistinen elektronikaasu

Elektronien lepoenergia on

$$mc^2 = 0.511\text{keV}$$

ja relativistinen kokonaisenergia

$$\begin{aligned}\epsilon_p &= \sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2} \\ &= mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots\end{aligned}$$

Olkoon

$$k_c = \frac{mc}{\hbar} = 2.59 \cdot 10^{12} \text{m}^{-1}$$

elektronin Compton-aaltovektori ja

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{m}$$

sen Compton-aallonpituus.

Koska $p = \hbar k$, on

$$\epsilon_k = c\hbar\sqrt{k^2 + k_c^2}.$$

Periodiset reunaehdot ovat samat kuin epärelativistisessa tapauksessa, eli

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z),$$

joten on voimassa

$$\rho = \frac{k_F^3}{3\pi^2}.$$

Kun $k_F = (3\pi^2\rho)^{1/3}$ on kertalukua k_c , on relativistiset korjaukset otettava huomioon. Vastaava tiheys on

$$\begin{aligned}\rho_c &= \frac{k_c^3}{3\pi^2} = 5.87 \cdot 10^{35} \frac{1}{\text{m}^3} \\ &\approx 10^6 \times \text{metallin elektronikaasun tiheys.}\end{aligned}$$

Ultrarelativistinen elektronikaasu on kyseessä silloin, kun $k_F \gg k_c$ tai vastaavasti $\rho \gg \rho_c$.

Tarkastellaan *kylmää* relativistista ainetta, ts. oletetaan että $T \ll T_F$.

Kokonaisenergia on

$$E = N\bar{\epsilon} = N \frac{\int_0^{k_F} dk k^2 c\hbar \sqrt{k^2 + k_c^2}}{\int_0^{k_F} dk k^2},$$

missä

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &= mc^2 \frac{\int_0^{k_F/k_c} dx x^2 \sqrt{1+x^2}}{\int_0^{k_F/k_c} dx x^2} \\ &= mc^2 + mc^2 \frac{\int_0^{k_F/k_c} dx x^2 [\sqrt{1+x^2} - 1]}{\int_0^{k_F/k_c} dx x^2}\end{aligned}$$

on keskimääräinen elektronin energia.

Epärelativistisella rajalla on voimassa

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &\approx mc^2 \left[1 + \frac{\int_0^{k_F/k_c} dx x^2 [\frac{1}{2} x^2 + \dots]}{\int_0^{k_F/k_c} dx x^2} \right] \\ &= mc^2 \left[1 + \frac{3}{10} \left(\frac{k_F}{k_c} \right)^2 + \dots \right],\end{aligned}$$

josta edelleen saadaan aikaisemmat tulokset kunhan otetaan mukaan myös elektronin lepoenergia. Ultrarelativistisella rajalla $k_F \gg k_c$ saadaan

$$\bar{\epsilon} \approx mc^2 \frac{\int_0^{k_F/k_c} dx x^3}{\int_0^{k_F/k_c} dx x^2} = \frac{3}{4} c\hbar k_F.$$

Energiatiheys on siis

$$\frac{E}{V} = \frac{3}{4} (3\pi^2)^{1/3} c\hbar \rho^{4/3}$$

ja paine

$$p = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_N$$

ultrarelativistisella rajalla

$$p = \frac{1}{3} \frac{E}{V} = \frac{1}{4} (3\pi^2)^{1/3} c\hbar \rho^{4/3}.$$

Valkoinen kääpiötähti

Toimivassa tähdessä ydinreaktioissa (pääasiassa vedyn fuusioituessa heliumiksi) vapautuva energia ja tähteä kokoonpuristava gravitaatio ovat tasapainossa. Ydinpolttoaineen loppuessa tähti romahtaa kasaan. Jos tähden massa on riittävä pakkautuu aine niin tiukkaan, että kaikki materia on täysin ionisoitunutta. Edelleen tähden massasta riippuen stabiili lopputila voi olla mm.

- *valkoinen kääpiö*, jos degeneroituneen elektronisen plasman paine estää tähteä romahtamasta edelleen.
- *neutronitähti*, jos elektronikaasun paine ei riitä kumoamaan gravitaatiovoimia, vaan materia tiivistyy edelleen neutroneiksi ja näiden degeneraatiopaine estää enemmän luhistumisen.

Valkoisen kääpiön tyypillisiä ominaisuuksia:

- tähden läpimitta $2R \approx 10^4 \text{ km}$.
- nukleonien kokonaismäärä $N_N \approx 10^{57}$.
- massa $M \approx 10^{30} \text{ kg} \approx M_\odot$, missä $M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ on auringon massa.
- massatiheys $\rho_m \approx 10^{10} \text{ kg m}^{-3}$ on noin $10^6 \times$ maan tai auringon tiheys.
- elektronien lukumäärätiheys $\rho \approx 10^{36} \text{ m}^{-3}$. Tällöin $k_F \approx k_c$, joten elektronikaasu on vain kohtuullisen relativistinen. Sisäosien kaasu voi kuitenkin olla paljon tiheämpää ja niin ollen ultrarelativistista.
- paine $p \approx 10^{22} \text{ Pa} \approx 10^{17} \text{ atm}$.

- sisäosien lämpötila $T \approx 10^7 \text{ K} \approx T_\odot$. Koska fermilämpötila on $T_F \approx 10^{10} \text{ K} \gg T$ on kyseessä kuitenkin kylmä elektronikaasu.

Olkoon $p(r)$ paine etäisyydellä r tähden keskipisteestä, $g(r)$ vastaava gravitaatiokiihtyvyys ja $\rho_m(r)$ tiheys. Hydrostaattinen mekaanisten voimien tasapainoehto on

$$\frac{dp}{dr} = -g(r)\rho_m(r).$$

Nyt

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2},$$

missä $M(r)$ on säteen r sisäpuolella olevan materian massa ja

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

on gravitaatiovakio. Saamme yhtälöparin

$$\begin{aligned}\frac{dp(r)}{dr} &= -G \frac{M(r)\rho_m(r)}{r^2} \\ \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho_m(r).\end{aligned}$$

Koska ytimissä on neutroneja suunnilleen yhtä paljon kuin protoneja, joita puolestaan on yhtä paljon kuin elektroneja, on

$$\rho_m(r) \approx 2m_p \rho(r).$$

Tässä

$$m_p = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

on protonin massa ja $\rho(r)$ elektronien lukumäärätiheys. Hyvänä aproksimaationa voidaan tähden elektronitiheyttä pitää vakiona ρ . Silloin

$$M(r) = \frac{8}{3} \pi m_p \rho r^3$$

ja kokonaismassa siten

$$M = \frac{8}{3} \pi m_p \rho R^3,$$

kun R on tähden säde. Paineen on nyt toteutettava differentiaaliyhtälö

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{16}{3} \pi m_p^2 \rho^2 Gr$$

reunaehdolla, että paine häviää tähden pinnalla, ts.

$$p(R) = 0.$$

Integroimalla differentiaaliyhtälö saadaan keskustan paineeksi

$$p = \frac{8\pi}{3} G m_p^2 \rho^2 R^2.$$

Koska kyseessä ei ole aivan ultrarelativistinen elektronikaasu, lasketaan paine hieman tarkemmin kuin

edellä. Elektronin keskimääräinen energia on

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &= mc^2 \frac{\int_0^{k_F/k_c} dx x^2 \sqrt{x^2 + 1}}{\int_0^{k_F/k_c} dx x^2} \\ &= mc^2 \frac{\int_0^{k_F/k_c} dx x^3 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \dots\right]}{\int_0^{k_F/k_c} dx x^2} \\ &= mc^2 \left[\frac{3}{4} \frac{k_F}{k_c} + \frac{3}{4} \frac{k_c}{k_F} + \dots \right].\end{aligned}$$

Tästä saadaan edelleen paineeksi

$$\begin{aligned}p &= \frac{\hbar c}{12\pi^2} (k_F^4 - k_c^2 k_F^2 + \dots) \\ &= \frac{1}{4} (3\pi^2)^{1/3} \hbar c \rho^{4/3} \left[1 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2 (3\pi^2 \rho)^{2/3}} + \dots \right].\end{aligned}$$

Tämä on relativistisen elektronikaasun tilanyhtälö. Vaaditaan, että tilanyhtälön ja hydrodynaamisen tasapainehdon antama paine ovat tähden keskustassa yhtäsuuret, ts.

$$\begin{aligned}\frac{8\pi}{3} G m_p \rho^2 R^2 &= \\ \frac{1}{4} (3\pi^2)^{1/3} \hbar c \rho^{4/3} &\left[1 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2 (3\pi^2 \rho)^{2/3}} + \dots \right].\end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän elektronitiheys massan ja säteen funktiona, ts.

$$\rho = \frac{3M}{8\pi m_p R^3}$$

päädytään ehtoon

$$\left(\frac{M}{M_c}\right)^{2/3} = 1 - \left(\frac{R}{R_c}\right)^2 \left(\frac{M_c}{M}\right)^{2/3},$$

missä

$$\begin{aligned}M_c &= m_p \left(\frac{9\pi}{512}\right)^{1/2} \left(\frac{\hbar c}{G m_p^2}\right)^{3/2} \approx 0.52 \cdot 10^{57} m_p \\ R_c &= \frac{\hbar}{mc} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \left(\frac{M_c}{m_p}\right)^{1/3} \approx 4700 \text{ km}.\end{aligned}$$

Tähden säteeksi saadaan

$$R = R_c \left(\frac{M}{M_c}\right)^{1/3} \left[1 - \left(\frac{M}{M_c}\right)^{1/3} \right].$$

Nähdään, että valkoisella kääpiöllä on maksimimassa $M = M_c$. Tarkempi lasku osoittaa, että valkoisen kääpiön massa ei voi ylittää *Chandrasekharin rajaa*, noin $1.4 M_\odot$, luhistumatta neutronitähdiksi tai mustaksi aukoksi.

Muita fermionisysteemejä

Ydinmateria

Raskaiden ytimien massatiheys on

$$\rho_m \approx 2.8 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^{-3}.$$

Kun oletetaan protoni- ja neutronitiheydet samoiksi, ovat kummankin fermikaasun aaltovektorit

$$k_F \approx 1.36 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-1}$$

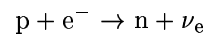
ja fermienergiat

$$\epsilon_F \approx 38 \text{ MeV}.$$

Koska $m_n c^2 = 938 \text{ MeV}$, on ydinmateria epärelativistista. Nukleonien väliset atraktiiviset vuorovaikutukset kumoavat kineettisestä energiasta aiheutuvan paineen.

Neutronitähti

Tähden massan ylittäessä Chandrasekharin rajan elektronien fermikaasun paine ei riitä kumoamaan gravitaatiovoimia vaan tähti jatkaa luhistumistaan. Tällöin tähestä muodostuu jättiäisydin, jossa useimmat elektronit ja protonit ovat ydinreaktion



kautta muuttuneet neutroneiksi. Tähden säde on

$$R \approx 10 \text{ km},$$

nukleoniluku

$$N_N \approx 10^{57}$$

ja massatiheys

$$\rho_m \approx 10^{18} \text{ kg m}^{-3}.$$

Gravitaatiovoimaa vastusta paine aiheutuu enimmäkseen neutronien fermikaasun paineesta ja vahvoista, lyhyillä etäisyyksillä erittäin repulsiivisista ydinvoimista.

Kvarkkimateria

Kun ydinainetta puristetaan 2–10 kertaa tiheämmäksi kuin atomiytimissä, alkavat nukleonit mennä ”päällekkäin”, jolloin niiden sisältämät kvarkit muodostavat kvarkkiplasman.

Nestemäinen ${}^3\text{He}$

Ydin on p+p+n ja ydinspin $\frac{1}{2}$.

Matalissa lämpötiloissa ydinspin määrää statistiikan, ts.

${}^3\text{He}$ atomit ovat fermioneja.

Normaaliitiheyttä vastaava fermilämpötila on

$$T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B} \approx 5 \text{ K}.$$

Koska ${}^3\text{He}$ -atomien väliset vuorovaikutukset ovat huomattavia, ${}^3\text{He}$ -materia muodostaa vuorovaikuttavan *ferminesteen*. ${}^3\text{He}$ -nesteellä on kaksi suprafaasia (A ja B). Nämä ovat tasapainossa normaalin faasin kanssa kriittisessä pisteessä

$$T_c \approx 2.7 \text{ mK} < \frac{T_F}{1000}.$$