

Kriittiset ilmiöt

Toisen kertaluvun faasitransitiossa systeemi yleensä siirtyy ylemmää lämpötilaa vastaavasta faasista alempaa lämpötilaa vastaavaan vähemmän symmetriseen faasiin. Sanotaan, että kyseessä on jonkin *symmetrian spontaani rikkoutuminen*. Esimerkiksi ferromagneettinen materia polaroituu tietyn kriittisen lämpötilan alapuolella. Tällöin rikkoutuu spinrotaationsymmetria.

Symmetrian rikkoutumisastetta kuvataan *järjestysparametrilla*, joka yleensä liitetään systeemin jonkin observaabelin odotusarvoon. Ferromagneettisen systeemin tapauksessa sopiva järjestysparametri on magnetoituma $\mathbf{m}$. Symmetrisessä faasissa $\mathbf{m} = 0$ ja järjestäytyneessä eli symmetrian rikkovassa faasissa $\mathbf{m} \neq 0$.

Olkoon nyt järjestysparametri m ja h vastaavaan observaabeliin kytkeytyvä ulkoinen kenttä. Tarkastellaan systeemiä kriittisen pisteen $T = T_c$ lähistöllä. Kun merkitään

$$\tau = T - T_c,$$

on kriittinen piste (τ, h) -tason origossa.

Koska kriittinen piste on termodynaamisten potentiaalien singulaarisuus piste, jaetaan nämä säännöllisiin ja singulaarisiin osiinsa. Esimerkiksi kirjoitetaan

$$\begin{aligned} F(T, m) &= F_0(T, m) + F_s(T, m) \\ G(T, h) &= G_0(T, h) + G_s(T, h) = F - hm, \end{aligned}$$

missä funktiot F_0 ja G_0 ovat säännöllisiä pisteen $(\tau = 0, h = 0)$ ympäristössä funktioiden F_s ja G_s ollessa singulaarsia. Näiden differentiaalit ovat

$$\begin{aligned} dF(T, m) &= -S dT + h dm \\ dG(T, h) &= -S dT - m dh. \end{aligned}$$

Kriittiset eksponentit

Kriittisen pisteen läheisyydessä termodynaamisten muuttujien singulaariset osat ovat (suurella tarkkudella) verrannollisia suureiden τ ja h tiettyihin potensseihin. *Kriittiset eksponentit* eli *kriittiset indeksit* määrittellään seuraavasti:

- α, α' määräävät ominaislämmön singulaarisen osan siten, että

$$\begin{aligned} C_h &= -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_h \\ &= \begin{cases} K \tau^{-\alpha}, & \text{kun } T > T_c \\ K' (-\tau)^{-\alpha'}, & \text{kun } T < T_c. \end{cases} \end{aligned}$$

Käytännössä on $\alpha' = \alpha$.

- β määrää järjestysparametrin käyttäytymisen,

$$m(T) = \begin{cases} 0, & \text{kun } T > T_c \\ K (-\tau)^\beta, & \text{kun } T < T_c. \end{cases}$$

- γ, γ' liittyvät susceptiivisyyteen,

$$\begin{aligned} \chi &= \left(\frac{\partial m}{\partial h} \right)_T = - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial h^2} \right)_T \\ &= \begin{cases} K \tau^{-\gamma}, & \text{kun } T > T_c \\ K' (-\tau)^{-\gamma'}, & \text{kun } T < T_c. \end{cases} \end{aligned}$$

Mitaustarkkuuden rajoissa on $\gamma' = \gamma$.

- δ kertoo, miten järjestysparametri riippuu kentästä h kriittisessä lämpötilassa $T = T_c$:

$$m(T_c, h) = K h^{1/\delta}.$$

- ν määrää korrelaatiopituuden riippuvuuden lämpötilasta,

$$\xi = K |\tau|^{-\nu}.$$

Indeksi ν ei itseasiassa ole termodynaaminen suure, sillä se liittyy mikroskooppiseen parametriin ξ .

Skaalausteoriaa

Skaalautuva yhtälö on sellainen, joka säilyy invarianttina mittakaavan muutoksissa kun mittayksiköt valitaan toistensa suhteen sopivasti skaalaten. Tarkastellaan esimerkkinä *Navier-Stokesin* virtausyhtälöä

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{m\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v},$$

missä $\mathbf{v}$ on nopeus, ρ tiheys, p paine ja $\mathbf{f}$ voima. Kerroin

$$\nu = \frac{\eta}{m\rho}$$

on kinemaattinen viskositeetti ja η viskositeetti. Olkoot T, L, V ja M ajan, pituuden, nopeuden ja massan dimensiolliset yksiköt. Vastaavien mittalukujen $t', \mathbf{r}', \mathbf{v}'$ ja m' (esim. massa on $m = m' M$) avulla Navier-Stokesin yhtälö saa muodon

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' = \mathbf{f}' - \frac{1}{m' \rho'} \nabla' p' + \frac{1}{R} \nabla'^2 \mathbf{v}'.$$

Parametri R on dimensioton *Reynoldsin luku*

$$R = \frac{L^2}{T\nu} = \frac{VL}{\nu} = \frac{m\rho VL}{\eta},$$

joka karakterisoi virtausta: jos $R \lesssim 10 \dots 100$, virtaus on yleensä laminaarinen ja jos $R \gtrsim 10 \dots 100$, se on turbulentti.

Mittalukujen avulla kirjoitetusta Navier-Stokesin yhtälöstä nähdään, että systeemien käyttäytymisen määrää Reynoldsin luku. Jos systeemistä S päästään systeemiin S_1 skaalaamalla mittayksiköt siten, että Reynoldsin luku säilyy muuttumattomana, säilyy myös systeemiä kuvaava yhtälö, samoin kuin vastaava ratkaisu, muuttumattomana. Sanotaan, että systeemit S ja S_1 ovat *similaariset*.

Konkreettisena esimerkkinä tarkastellaan kahta systeemiä, jotka ovat samaa ainetta, ts.

$$\rho = \rho_1 \text{ ja } \nu = \nu_1.$$

Skaalataan lineaarinen mitta tekijällä s eli

$$L_1 = sL.$$

Jos halutaan systeemien olevan similaarisia, täytyy Reynoldsin luvun säilyä invarinattina. Esim.

$$R = \frac{L^2}{T\nu} = \frac{L_1^2}{T_1\nu_1} = \frac{s^2L^2}{s_T T\nu},$$

joten ajan skaalaustekijän s_T täytyy olla

$$s_T = s^2.$$

Olkoot A ja A_1 jotkin similaarisiin systeemeihin S ja S_1 liittyvät dimensiolliset mittayksiköt. Osoittautuu, että kaikki skaalalait ovat muotoa

$$A_1 = s^{-d_a} A,$$

missä d_a on rationaaliluku.

Skaalauhypoteesi

Tiiviissä aineessa (nesteessä, kiteessä, ...)

- mikroskooppisen pituusskaalan määrää aineen atomien tai molekyylien välinen etäisyys
- makroskooppisia suureita tarkasteltaessa aineen mikroskooppinen rakenne ei näy.
- ainoa makroskooppisestikin oleellinen materian mikroskooppisiin ominaisuuksiin liittyvä pituusmitta on korrelaatiopituus ξ , sillä kriittisen pisteen läheisyydessä se kasvaa makroskooppisen suureksi.

On siis syytä olettaa, että lähestyttäessä kriittistä pistettä klassinen similaarisuus alkaa olla voimassa:

- Tarkastellaan kahta sama-aineista kappaletta, joissa korrelaatiopituudet ovat ξ ja ξ_1 .
- Korrelaatiopituus ilmoittaa fluktuaatioiden mittakaavan, ts. aineen rakenteen mittakaavan (edellyttäen, että havainnot eivät pysty erottamaan atomaarisia rakenteita).
- Kun kappaleita tarkastellessa käytetään sellaisia suurennoksia, että ξ ja ξ_1 näyttävät saman mittaisilta (ja sen lisäksi mahdollisesti valitaan sopivat seurantataajuudet), ei kappaleiden välillä voida havaita mitään eroavuuksia.

Koska korrelaatiopituus kriittisessä pisteessä on ääretön, esiintyy järjestysparametriin liittyvissä suureissa fluktuaatioita kaikissa mittakaavoissa, ts. atomaarista mittakaavaa lukuunottamatta systeemissä ei ole luonnollista pituusmittaa. Systeemi siis näyttää samanlaiselta, *itsesimilaariselta*, katsottiinpa sitä missä mittakaavassa tahansa. Olettamus itsesimilaarisuudesta matematisoidaan *skaalauhypoteesiksi*:

- Kaikkien termodynaamisten suureiden singulaariset osat skaalautuvat yksinomaan korrelaatiopituuden ξ potenssifunktioina.

- Suure A käyttäytyy kriittisen pisteen läheisyydessä kuten

$$A \propto \xi^{-d_A},$$

missä d_A on suureen A *skaalausdimensio*.

Korrelaatiopituuden skaalausdimensio on siten $d_\xi = -1$. Edelleen nähdään, että suureen $A^x B^y \dots$ skaalausdimensio on

$$d_{(A^x B^y \dots)} = x d_A + y d_B + \dots$$

Koska kriittinen indeksi ν määriteltiin siten, että

$$\xi \propto |\tau|^{-\nu},$$

on lämpötilan skaalausdimensio

$$d_\tau = \nu^{-1}.$$

Tärkeimpien suureiden dimensiot ovat

- *Korrelaatiopituus* ξ : Aiemmin todettiin, että

$$d_\xi = -1.$$

- *Lämpötila* τ : Saatiin

$$d_\tau = \frac{1}{\nu}.$$

- *Pituus* ℓ : Koska korrelaatiopituus määrää systeemin pituuskalan, skaalautuu ℓ samoin kuin ξ eli

$$d_\ell = -1.$$

- *Aaltovektori* q : Aaltovektori on oleellisesti kääntäen verrannollinen pituuteen, joten

$$d_q = 1.$$

- *Järjestysparametri* m : Indeksä β määriteltiin siten, että $m \propto (-\tau)^\beta$, joten

$$d_m = \beta d_\tau = \frac{\beta}{\nu}.$$

- *Vapaa energia* G : Skaalamuunnokset eivät vaikuta systeemin vapaaseen energiaan, joten

$$d_G = 0.$$

- *Tilavuusyksikköä kohti laskettu vapaa energia* g : Koska $g = G/V$, on

$$d_g = d_G - d_V = -d_\ell = d,$$

kun d on avaruuden dimensio.

- *Ominaislämpö* c : Koska ominaislämpö (tiheys) on

$$c \approx -T_c \frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2},$$

toteuttaa skaalausdimensio d_c ehdon

$$d_c = d_g - 2d_\tau = d - \frac{2}{\nu}.$$

Ominaislämmölle on siis voimassa

$$c \propto \xi^{(2/\nu)-d} \propto |\tau|^{d\nu-2}$$

ja kriittisen indeksin α määritelmän mukaan

$$c \propto |\tau|^{-\alpha}.$$

Kriittisiä indeksejä sitoo niin ollen *skaalauslaki*

$$\alpha = 2 - \nu d.$$

- *Kenttä h* : Tasapainossa järjestysparametri m on

$$m = -\frac{\partial g}{\partial h},$$

joten

$$d_m = d - d_h.$$

Kentälle h on siis voimassa

$$d_h = d - d_m = d - \frac{\beta}{\nu}.$$

Suskeptiivisuus noudattaa indeksin γ määritelmän mukaan relaatiota

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial h} \propto |\tau|^{-\gamma},$$

joten

$$d_m - d_h = -\gamma d_\tau.$$

Vertaamalla tästä saatavaa dimensiota d_h aikaisempaan tulokseen saamme skaalauslain

$$\gamma = \nu d - 2\beta.$$

Edelleen indeksi δ määriteltiin siten, että kriittisessä lämpötilassa on

$$m \propto h^{1/\delta}.$$

Tällöin on

$$d_m = \frac{d_h}{\delta},$$

josta aikaisemman tuloksen perusteella saadaan skaalauslaki

$$\delta = \frac{\nu d}{\beta} - 1.$$

Edellä johdetuista kolmesta skaalauslaista voidaan mikroskooppiseen korrelaatiopituuteen liittyvä vaikeasti mittava indeksi ν eliminoida, jolloin jäljelle jäävät termodynaamisia indeksejä sitovat skaaluslait

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 2 \\ \beta(\delta - 1) &= \gamma. \end{aligned}$$

Huom. Vaikka edellä johdetut skaaluslait perustuvat fenomenologiseen argumentointiin, pitävät ne paikkansa mittaustarkkuuden rajoissa.

Widomin skaalaus

Tarkastellaan alkeiskoppia (tai hiukkasta) kohti laskettua Gibbsin funktiota

$$g(\tau, h) = g_0(\tau, h) + g_s(\tau, h),$$

missä on jälleen erotettu säännöllinen osa ja kriittisessä pisteessä ($\tau = 0, h = 0$) singulaarinen osa toisistaan. Tämän differentiaali on

$$dg = -s d\tau - m dh,$$

kun $s = S/N$ on entropia alkeiskoppia (hiukkasta) kohti. Koska järjestysparametri m on nolla kriittistä pistettä korkeammissa lämpötiloissa, täytyy siihen liittyvien kriittisten eksponenttien määräytyä yksinomaan singulaarisesta funktiosta g_s .

Funktio f on *yleistetty homogeeninen funktio*, jos se toteuttaa ehdon

$$f(\lambda^{\alpha_1} x_1, \lambda^{\alpha_2} x_2, \dots) = \lambda f(x_1, x_2, \dots).$$

Widomin hypoteesin mukaan funktio g_s käyttäytyy kriittisen pisteen läheisyydessä, kuten yleistetty homogeeninen funktio eli *skaalautuu* kuten

$$g_s(\lambda^p \tau, \lambda^q h) = \lambda g_s(\tau, h),$$

kun $\lambda > 0$ ja p ja q ovat jotkin, systeemistä riippuvat, eksponentit.

Koska skaalausyhtälö on voimassa kaikilla positiivisilla suureen λ arvoilla, on se voimassa kun $\lambda = h^{-1/q}$, jolloin $\lambda^q h = 1$. Skaalauhypoteesi voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} g_s(\tau, h) &= h^{1/q} g_s\left(\frac{\tau}{h^{p/q}}, 1\right) \\ &= h^{1/q} \phi\left(\frac{\tau}{h^{p/q}}\right). \end{aligned}$$

Tässä on määritelty

$$\phi(x) = g_s(x, 1).$$

Kriittiset indeksit saadaan seuraavasti:

- β . Derivoidaan skaalausyhtälö

$$g_s(\lambda^p \tau, \lambda^q h) = \lambda g_s(\tau, h),$$

kentän h suhteen ja muistetaan, että järjestysparametri on

$$m(\tau, h) = -\frac{\partial g_s(\tau, h)}{\partial h},$$

joten on voimassa skaalausehto

$$\lambda^q m(\lambda^p \tau, \lambda^q h) = \lambda m(\tau, h). \quad (*)$$

Koska järjestysparametrin oletetaan olevan $m \neq 0$, on $\tau < 0$. Silloin voidaan valita λ siten, että $\lambda^p \tau = -1$. Asettamalla $h = 0$ saadaan

$$m(\tau, 0) = (-\tau)^{(1-q)/p} m(-1, 0).$$

Määritelmän mukaan on

$$m(\tau, 0) \propto (-\tau)^\beta,$$

joten

$$\beta = \frac{1-q}{p}.$$

- δ . Asetetaan yhtälössä (*) $\tau = 0$ ja $\lambda^q = 1/h$, jolloin

$$m(0, h) = h^{1/q-1} m(0, 1).$$

Määritelmän mukaan $m(0, h) \propto h^{1/\delta}$, joten

$$\delta = \frac{q}{1-q}.$$

- γ, γ' . Määritelmän mukaan susceptiivisuus on

$$\chi(\tau, h) = \frac{\partial m(\tau, h)}{\partial h},$$

joka kriittisen pisteen läheisyydessä käyttäytyy kuten

$$\chi \propto \begin{cases} \tau^{-\gamma}, & \text{kun } \tau > 0 \\ (-\tau)^{-\gamma'}, & \text{kun } \tau < 0. \end{cases}$$

Derivoimalla (*) kentän h suhteen saadaan

$$\lambda^{2q} \chi(\lambda^p \tau, \lambda^q h) = \lambda \chi(\tau, h).$$

Asetetaan $h = 0$ ja $\lambda^p \tau = \pm 1$, jolloin

$$\chi(\tau, 0) = |\tau|^{-(2q-1)/p} \chi(\pm 1, 0).$$

Tästä voidaan lukea eksponenttien γ ja γ' arvoiksi

$$\gamma = \gamma' = \frac{2q-1}{p}.$$

- α, α' . Ominaislämpö on

$$c_h \propto \frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2}.$$

Derivoidaan skaalausyhtälö

$$g_s(\lambda^p \tau, \lambda^q h) = \lambda g_s(\tau, h)$$

kahdesti muuttujan τ suhteen. Saadaan

$$\lambda^{2p} c_h(\lambda^p \tau, \lambda^q h) = \lambda c_h(\tau, h).$$

Asetetaan $h = 0$ ja $\lambda^p \tau = \pm 1$ ja verrataan tulosta indeksien α ja α' määritelmään

$$c_h \propto \begin{cases} \tau^{-\alpha}, & \text{kun } \tau > 0 \\ (-\tau)^{-\alpha'}, & \text{kun } \tau < 0. \end{cases}$$

Nähdään, että

$$\alpha = \alpha' = 2 - \frac{1}{p}.$$

Helposti todetaan, että Widomin skaalaushypoteesi johtaa skaalauslakeihin

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 2 \\ \beta(\delta - 1) &= \gamma. \end{aligned}$$

Kadanoffin skaalausteoria

Toisin kuin edellä kuvattu Widomin skaalaushypoteesi, Kadanoffin kehittämä menetelmä (1966) perustuu aineen mikroskooppisiin ominaisuuksiin.

Kadanoffin menetelmä pääpiirteittäin:

- Yhdistetään alkuperäiset mikroskooppiset tilamuuttujat blokeittain *blokkimuuttujiksi*.
- Määrätään blokkien väliset efektiiviset vuorovaikutukset. Tätä mikroskooppisen systeemin systeemin karkeistusta sanotaan *blokkimuunnokseksi*.
- Blokkimuunnokset muodostavat kommutatiivisen puoliryhmän, ns. *renormalisaatioryhmän*. Muunnoksia voidaan tehdä toistuvasti peräkkäin.
- Koska kriittiseen pisteeseen ajautuneessa systeemissä ei ole luonnollista mittakaavaa, näyttävät muunnetut systeemit toistensa kopioilta. Kriittinen piste vastaa niin ollen muunnosten *kiintopistettä*.

Sovelletaan menetelmää d -ulotteiseen Isingin spinsysteemiin.

Blokkimuunnos

Merkitään alkuperäisiä hilapisteitä indekseillä $i, j, \dots$ ja näistä yhdistämällä saatuja blokkeja indekseillä $I, J, \dots$. Blokin I blokkispin σ'_I määritellään siten, että

$$\sigma'_I = \sum_{i \in I} \sigma_i.$$

Jos blokkeihin I päädytään skaalaamalla pituusmitta tekijällä L , on kussakin blokissa L^d spiniä. Koska kukin spin voi Isingin mallissa saada arvot $\sigma_i = \pm 1$, voi blokkispin saada arvot

$$\sigma'_I = -L^d, -L^d + 2, \dots, L^d$$

eli kaikkiaan $L^d + 1$ eri arvoa.

Olkoon H alkuperäinen Hamilton. Merkitään

$$\mathcal{H}[\sigma_i] = \beta H = -K \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i.$$

Tilasumma on

$$Z = e^{-\mathcal{G}} = \text{Tr} e^{-\mathcal{H}[\sigma_i]} = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\mathcal{H}[\sigma_i]},$$

missä $\mathcal{G} = \beta G$, G on Gibbsin funktio. Jaetaan summaukset jälkeä laskettaessa kahteen osaan

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\mathcal{H}[\sigma_i]} \\ &= \sum_{\{\sigma'_I\}} \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\mathcal{H}[\sigma_i]} \prod_I \delta \left(\sigma'_I, \sum_{i \in I} \sigma_i \right) \\ &= \sum_{\{\sigma'_I\}} e^{-\mathcal{H}[\sigma'_I]}. \end{aligned}$$

Tässä on määritelty

$$\begin{aligned} e^{-\mathcal{H}[\sigma'_I]} &= \text{Tr}_{\{\sigma'_I\}} e^{-\mathcal{H}[\sigma_i]} \\ &= \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\mathcal{H}[\sigma_i]} \prod_I \delta \left(\sigma'_I, \sum_{i \in I} \sigma_i \right). \end{aligned}$$

Kuten määritelmästä

$$\mathcal{H}[\sigma'_I] = \ln \text{Tr}_{\{\sigma'_I\}} e^{-\mathcal{H}[\sigma_i]}$$

nähdään, on *Hamiltonin blokkifunktio* $\mathcal{H}[\sigma'_I]$ itseasiassa *reduoitu vapaa energia*. Se voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$\mathcal{H}[\sigma'_I] = \overline{\mathcal{H}[\sigma_i]} \Big|_{\{\sigma'_I\}} - TS \Big|_{\{\sigma'_I\}},$$

missä $\overline{\mathcal{H}[\sigma_i]} \Big|_{\{\sigma'_I\}}$ on blokkikonfiguraatioissa $\{\sigma'_I\}$ laskettu energian odotusarvo (sisäinen energia). Hamiltonin blokkifunktio sisältää niin ollen blokkien sisäisiin muuttujiin liittyvän sisäisen entropian. Kriittisen pisteen läheisyydessä, skaalainvarianssista johtuen, oletetaan redusoidun vapaan energian olevan likimain samaa muotoa kuin alkuperäinen Hamiltonin funktio. Jotta tähän päästäisiin, skaalataan blokkispiniin arvoalue siten, että

$$\sigma'_I = z\sigma_I,$$

missä $\sigma_I = \pm 1$. Koska blokkispinin maksimiarvo on L^d , täytyy olla $z \leq L^d$.

Kriittiset eksponentit

Kadanoffin mukaan blokkimuuttujan efektiivisesti tärkeimmät arvot ovat $\pm z$. Merkitään

$$\mathcal{H}_L[\sigma_I] = \mathcal{H}[z\sigma_I].$$

Kirjoitetaan uusi Hamilton $\mathcal{H}_L$ samanmuotoiseksi kuin alkuperäinen $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_L[\sigma_I] = -K_L \sum_{\langle IJ \rangle} \sigma_I \sigma_J - h_L \sum_I \sigma_I.$$

Parametrit K_L ja h_L riippuvat nyt skaalasta L . Olkoot parametrien arvot kriittisessä pisteessä

$$\begin{aligned} K &= K_c \\ h &= h_c = 0. \end{aligned}$$

Koska kriittisessä pisteessä skaalattaessa mikään ei muutu, täytyy siinä myös olla voimassa

$$\begin{aligned} K_L &= K_c \\ h_L &= h_c = 0. \end{aligned}$$

Tarkastellaan kriittisen pisteen ympäristöä. Oletetaan, että $h \neq 0$, jolloin myös sitä vastaavalle skaalatulle kentälle on voimassa $h_L \neq 0$. Kirjoitetaan alkuperäinen kytkinvakio muotoon

$$K = K_c + \Delta K$$

ja vastaava skaalattu kytkinvakio muotoon

$$K_L = K_c + \Delta K_L.$$

Muutetaan nyt skaalaussuhdetta L (pienellä) määrällä δL , jolloin skaalauksen suhteellinen muutos on $\delta L/L$. Voidaan olettaa (hyvänä aproksimaationa), että skaalattujen parametrien suhteelliset muutokset ovat verrannollisia skaalauksen suhteelliseen muutokseen, ts.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Delta K_L}{\Delta K_L} &= x \frac{\delta L}{L} \\ \frac{\delta h_L}{h_L} &= y \frac{\delta L}{L}, \end{aligned}$$

missä x ja y ovat vakioita.

Suhteen muutoksen ollessa infinitesimaalinen saadaan differentiaaliyhtälöt

$$\begin{aligned} x &= \frac{\partial \ln \Delta K_L}{\partial \ln L} \\ y &= \frac{\partial \ln h_L}{\partial \ln L}, \end{aligned}$$

jotka integroituina antavat

$$\begin{aligned} K_L &= K_c + L^x (K - K_c) \\ h_L &= L^y h. \end{aligned}$$

Jotta alkuperäinen ja skaalattu Hamilton johtaisivat samaan kokonaisenergiaan, täytyy mm. kytkennän ulkoiseen kenttään toteuttaa ehto

$$h \sum_{i \in I} \sigma_i = h\sigma'_I = hz\sigma_I = h_L\sigma_I,$$

joten kenttä skaalautuu kuten $h_L = zh$. Nähdään, että

$$z = L^y \text{ ja } y \leq d.$$

Samalla perusteella voidaan olettaa, että lämpötilan suhteellinen poikkeama kriittisestä pisteestä,

$$\tau = \frac{T - T_c}{T_c}$$

käyttäytyy kuten kytkinvakion K suhteellinen poikkeama kriittisestä arvosta, eli

$$\tau_L = L^x \tau.$$

Spinyksikköä kohti laskettu Gibbsin funktio skaalautuu silloin, kuten

$$g(\tau_L, h_L) = g(L^x \tau, L^y h) = L^d g(\tau, h),$$

missä tekijä L^d johtuu siitä, että uusi blokki sisältää L^d vanhaa spiniä. Kirjoittamalla

$$\begin{aligned} x &= pd \\ y &= qd \end{aligned}$$

päädytään Widomin skaalaukseen.

Renormalisaatioryhmä

Oletetaan, että Hamilton $\mathcal{H}$ riippuu parametreistä

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots),$$

Esim. $\mu = (K, h)$, kuten edellä. Blokkimuunnokset ovat nyt kuvauksia parametriavaruudessa

$$\mu \longrightarrow \mu_L.$$

Olkoon $\mathbf{R}_L$ blokkimuunnosta vastaava operaattori, ts.

$$\mu \longrightarrow \mu_L = \mathbf{R}_L \mu.$$

Koska blokkimuunnos on mittakaavan muutos, täytyy olla voimassa

$$\mathbf{R}_L \mathbf{R}_{L'} = \mathbf{R}_{LL'}.$$

Edelleen on samantekevää, missä järjestyksessä mittakaavamuunnokset tehdään:

$$\mathbf{R}_L \mathbf{R}_{L'} = \mathbf{R}_{L'} \mathbf{R}_L.$$

Blokkimuunnoksessa häviää informaatiota, esim. detaljoitu tieto alkuperäisten spinmuuttujien arvoista. Skaalaamalla ei siis ole mahdollista päästä takaisin lähtötilanteeseen: operaatiolla $\mathbf{R}_{L'}$ ei ole käänteismuunnosta operaatioiden $\{\mathbf{R}_L\}$ joukossa. Nähdään että operaatiot

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{R}_L\}$$

muodostavat *kommutatiivisen puoliryhmän*, jota sanotaan *renormalisaatioryhmäksi*.

Pistettä μ^* , joka toteuttaa ehdon

$$\mu^* = \mathbf{R} \mu^* \quad \forall \mathbf{R} \in \mathcal{R},$$

sanotaan *kiintopisteeksi*. Parametrien μ^* arvoja vastaava systeemi on kriittisessä pisteessä, sillä siinä tehty muunnos johtaa täsmälleen identtiseen systeemiin. Niiden pisteiden joukkoa, jotka peräkkäisissä blokkimuunnoksissa ajautuvat kiintopisteeseen μ^* , sanotaan *kriittiseksi pinnaksi*. Jos systeemi on kriittisellä pinnalla joskaan ei kriittisessä pisteessä, on se faasimuutoksen kriittisessä pisteessä, mutta sitä tarkastellaan vielä mikroskooppisia detaljeja paljastavassa mittakaavassa.