

- Selitä seuraavat käsitteet (kustakin kohdasta muutama lause, mahdollisesti kaava)
 - monisto (manifold)
 - energia-liikemäärätensori (energy-momentum-stress tensor)
 - koordinaatin r tulkinta Schwarzschildin metriikassa
 - spektrisiirtymä painovoimakentässä (gravitational spectral shift)
 - Friedmannin malli tasaiselle maailmankaikkeudelle (Friedmann model for flat universe)
 - kosmologinen vakio (cosmological constant)
- Muodosta lauseke tensorin τ^{ab} absoluuttiselle derivaatalle käyttäen hyväksi kontravariantin vektorin absoluuttisen derivaatan lauseketta sekä yleistämällä erikoistapausta $\tau^{ab} = \lambda^a \mu^b$.

- Osoita että kaksiulotteisen Riemannin moniston kaikki R_{ABCD} :n komponentit ovat joko nollia tai $\pm R_{1212}$. Käyttäen koordinaatteina polaari- ja atsimuuttikulmia, θ ja ϕ , osoita että a -säteisen pallon pinnan metrinen tensori on

$$[g_{AB}] = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Osoita että $R_{1212} = a^2 \sin^2 \theta$.

- Tasainen painovoimakenttä $V = gz$ vastaa metriikkaa

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 + \frac{2gz}{c^2}\right) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2)$$

Laske kertoimet $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ käyttäen muuttujia $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ ja $x^3 = z$. Osoita että rajalla $c \rightarrow \infty$ geodeettiset viivat toteuttavat Newtonin liikeyhtälön

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -mg \mathbf{e}_3 \quad (3)$$

- Eddington-Finkelstein-koordinaatit saadaan Schwarzschildin metriikasta määrittelemällä $v = ct + r + 2m \ln(r/2m - 1)$ jolloin

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4)$$

Johda yhtälöt radiaalisuunnassa kulkeville valonsäteille. Piirrä kvalitatiivinen kuva niistä $r-v$ -tasossa ja kuvaile sanallisesti fysikaalinen käyttäytyminen eri r :n arvoilla.

Täytä kurssipalautelomake (mikäli et ole tehnyt sitä aiemmin).

Apukaavoja

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc})$$

$$\frac{d^2 x^a}{du^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{du} \frac{dx^c}{du} = 0$$

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^c} = 0, \quad L(\dot{x}^c, x^c) \equiv \frac{1}{2} g_{ab}(x^c) \dot{x}^a \dot{x}^b$$

$$\frac{D\lambda^a}{du} = \frac{d\lambda^a}{du} + \Gamma_{bc}^a \lambda^b \frac{dx^c}{du}$$

$$\tau_{b;c}^a = \partial_c \tau_b^a + \Gamma_{dc}^a \tau_b^d - \Gamma_{bc}^d \tau_d^a$$

$$\lambda_{a;bc} - \lambda_{a;cb} = R_{abc}^d \lambda_d$$

$$R_{abc}^d = \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_c \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d$$

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{cdab}$$

$$R_{bcd}^a + R_{cdb}^a + R_{dbc}^a = 0$$

$$R_{ab} = R_{abc}^c \quad R = g^{ab} R_{ab} \quad G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad \kappa = -\frac{8\pi G}{c^4}$$

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$$

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad m = \frac{GM}{c^2}$$

$$d\tau^2 = dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad c = 1$$