Yleinen suhteellisuusteoria 763695S
Tentti 2.4.2004 (syksyn 2003 kurssin mukaan)

1. (a) Määrittele monisto (manifold).
   (b) Määrittele kontravariantti vektori.
   (c) Osoita että tensorin ominaisuus $\tau^{ab} = \tau^{ba}$ on riippumaton koordinaatistosta.

2. Johda lauseke kovariantin vektorin μ_a absoluuttiselle derivaatalle lähtemällä kontravariantin vektorin absoluuttisen derivaatan lausekkeesta ja siitä että $\lambda^a \mu_a$ on skalaari.

3. Kurssilla tutkittiin kaavaa

$$(\rho u^\mu)_{,\mu} + (p/c^2) u^\mu{}_{,\mu} = 0 \tag{1}$$

   missä u^μ on nelinopeus. Johda kaava johon tämä redusoituu tavallisen epärelativistisen materian tapauksessa.

4. Tasainen painovoimakenttä $V = gz$ vastaa metriikkaa

$$c^2 d\tau^2 = c^2 (1 + \frac{2gz}{c^2}) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{2}$$

   Laske kertoimet $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ käyttäen muuttujia $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ ja $x^3 = z$. Osoita että rajalla $c \to \infty$ geodeettiset viivat toteuttavat Newtonin liikeyhtälön

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{e}_3 \tag{3}$$

5. Kurssilla johdettiin (ainakin osittain) Friedmannin yhtälö

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2. \tag{4}$$

   Selitä kaavassa esiintyvät suureet. Kerro mitä kaavoja joudut käyttämään, jotta saisit tämän kaavan johdettua. (Älä tee laskuja, ne ovat liian pitkiä.)

Täytä kurssipalautelomake (mikäli et ole tehnyt sitä aiemmin).

Apukaavoja

$$\Gamma^a_{bc} = \tfrac{1}{2} g^{ad} \left(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc} \right) \tag{5}$$

$$\frac{d^2 x^a}{du^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{du} \frac{dx^c}{du} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^c} = 0, \qquad L\left(\dot{x}^c, x^c\right) \equiv \tfrac{1}{2} g_{ab}\left(x^c\right) \dot{x}^a \dot{x}^b \tag{7}$$

$$\frac{D\lambda^a}{du} = \frac{d\lambda^\alpha}{du} + \Gamma^a_{bc}\lambda^b \frac{dx^c}{du} \tag{8}$$

$$\tau^a_{b;c} = \partial_c \tau^a_b + \Gamma^a_{dc}\tau^d_b - \Gamma^d_{bc}\tau^a_d \tag{9}$$

$$\lambda_{a;bc} - \lambda_{a;cb} = R^d{}_{abc}\lambda_d \tag{10}$$

$$R^d{}_{abc} = \partial_b \Gamma^d_{ac} - \partial_c \Gamma^d_{ab} + \Gamma^e_{ac}\Gamma^d_{eb} - \Gamma^e_{ab}\Gamma^d_{ec} \tag{11}$$

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{cdab} \tag{12}$$

$$R^a{}_{bcd} + R^a{}_{cdb} + R^a{}_{dbc} = 0 \tag{13}$$

$$R_{ab} = R^c{}_{abc} \qquad R = g^{ab}R_{ab} \qquad G_{ab} = R_{ab} - \tfrac{1}{2}Rg_{ab} \tag{14}$$

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad \kappa = -\frac{8\pi G}{c^4} \tag{15}$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \frac{p}{c^2})u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \tag{16}$$

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad m = \frac{GM}{c^2} \tag{17}$$

$$d\tau^2 = dt^2 - R(t)^2\left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right), \quad c = 1 \tag{18}$$