Yleinen suhteellisuusteoria 763695S
Tentti 11.12.2009

1. (a) Miten määritellään kontravariantti vektori monistolla?

   (b) Kovariantin vektorikentän λ_a roottori määritellään antisymmetrisenä tensorikenttänä $\lambda_{a;b} - \lambda_{b;a}$. Osoita, että

$$\lambda_{a;b} - \lambda_{b;a} = \partial_b \lambda_a - \partial_a \lambda_b \tag{1}$$

   (c) Mitä tarkoitetaan moniston paikallisilla karteesisilla koordinaateilla?

2. Määritellään $x - y$ tasossa koordinaatit (u, v) kaavoilla

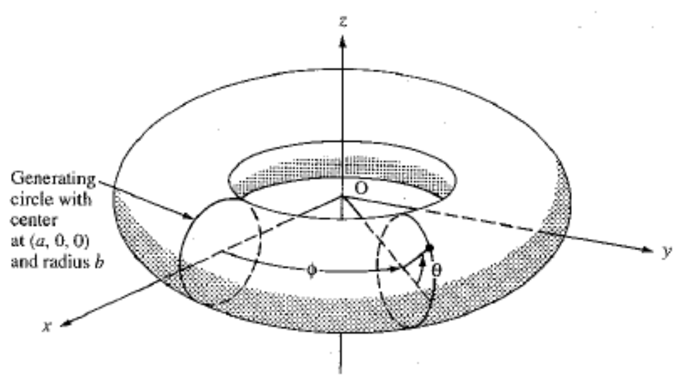
$$x = \sqrt{uv}, \qquad y = \sqrt{\frac{u}{v}}. \tag{2}$$

   Laske koordinaatteja (u, v) vastaavat luonnolliset kantavektorit sekä niiden duaalikantavektorit lausuttuna karteesisten kantavektorien $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ kannassa. Mitkä kantavektoreista ovat kaikkialla ortogonaalisia keskenään?

3. Torukselle (kuva) saadaan viivaelementti

$$ds^2 = b^2 d\theta^2 + (a + b\cos\theta)^2 d\phi^2, \tag{3}$$

   missä $b < a$. Johda geodeettisen viivan yhtälöt käyttäen Lagrangen yhtälöitä ja laske konnektion kertoimet. Tutki ovatko viivat $\theta =$ vakio geodeettisia.



4. Lähtien viivaelementistä

$$ds^2 = A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \tag{4}$$

   mitä pitää tehdä että saisit johdettua Schwarzschildin metriikan massiivisen kappaleen ympäristössä. Älä tee laskuja, kerro vain mitä kaavoja tarvitset.

5. Tarkastellaan Schwarzschildin metriikkaa massiivisen kappaleen ympäristössä. Vertaile etäisyyksiä eri suuntiin ja ajan kulumista paikallaan olevissa kelloissa verrattuna Schwarzschildin koordinaatteihin.

Täytä kurssipalautelomake.

Apukaavoja (HUOMAA LISÄYKSET)

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}, \qquad \boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{\nabla} u^i, \qquad g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{5}$$

$$\Gamma^a_{bc} = \tfrac{1}{2} g^{ad} \left(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}\right) \tag{6}$$

$$\frac{d^2 x^a}{du^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{du} \frac{dx^c}{du} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^c} = 0, \qquad L\left(\dot{x}^c, x^c\right) \equiv \tfrac{1}{2} g_{ab}\left(x^c\right) \dot{x}^a \dot{x}^b \tag{8}$$

$$\frac{D\lambda^a}{du} = \frac{d\lambda^\alpha}{du} + \Gamma^a_{bc} \lambda^b \frac{dx^c}{du} \tag{9}$$

$$\tau^a_{b;c} = \partial_c \tau^a_b + \Gamma^a_{dc} \tau^d_b - \Gamma^d_{bc} \tau^a_d \tag{10}$$

$$\lambda_{a;bc} - \lambda_{a;cb} = R^d{}_{abc} \lambda_d \tag{11}$$

$$R^d{}_{abc} = \partial_b \Gamma^d_{ac} - \partial_c \Gamma^d_{ab} + \Gamma^e_{ac} \Gamma^d_{eb} - \Gamma^e_{ab} \Gamma^d_{ec} \tag{12}$$

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{cdab} \tag{13}$$

$$R^a{}_{bcd} + R^a{}_{cdb} + R^a{}_{dbc} = 0 \tag{14}$$

$$R_{ab} = R^c{}_{abc} \qquad R = g^{ab} R_{ab} \qquad G_{ab} = R_{ab} - \tfrac{1}{2} R g_{ab} \tag{15}$$

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \qquad \kappa = -\frac{8\pi G}{c^4} \tag{16}$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \frac{p}{c^2}) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \tag{17}$$

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad m = \frac{GM}{c^2} \tag{18}$$

$$d\tau^2 = dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right), \qquad c = 1 \tag{19}$$